開鎖問題之規律探討

研究者：陳緼儂 陳怡樺
指導者：李政貴 老師

壹、緒論

一、研究動機

我們在找題目的時候，找到了這個題目，覺得它還蠻有趣，而且可以衍伸出很多問題，深入研究。說不定以後能應用在其他地方，比如說商業機密或科技、工程上，有實用價值。

二、研究目的

英國詹姆士一世時代，某一村莊將所有值錢的東西，都鎖在教堂的一個箱子裡。箱子用一些鎖鎖著。每個鎖都有個別而不同的鑰匙。為了確保村中任三人都有足夠鑰匙以打開箱子，但兩個人卻不能打開。到底需要幾個鎖？又需要多少把鑰匙？（每把鎖的鑰匙數相同）

三、研究問題

（一）如果你數一個特定的箱子的鎖的數目，你能推衍出在這種制度下，持有鑰匙的人有多少？

（二）在附近的另一個村落，採用更多封建制度。每一個村民依重要性分級（1為最重要的），村長要求安排如下：如果一群人希望打開箱子，那麼現場人員中，第 x 等級最少要有 x 人存在。則此規則為何？

貳、研究設計

一、將之特殊化！

二、先由小村莊開始。

三、先試著要求任兩人可打開，但一人不能的情況下。

參、研究方法

任兩人可打開，但一人不能的情況條件之下，將每把鑰匙編號，計算出其中之關係。

Ex1：有六個鎖（偶數個），一人四個，任兩人可開（兩人會擁所有的鎖）。

	A	B	C	D	E	F	
第一個人的	A	B	C	D			（少 E、F）
則下一個人要有 E、F							
第二個人的（再任選 ABCD 中兩個，例 CD）			C	D	E	F	（少 A、B）
則再下一個要有 E、F、A、B							
第三個人的	A	B			E	F	

第三個人有 E、F、A、B，剛好四個，代表他是最後一個人了。

總共有三人。

總共鑰匙為 2A＋2B＋2C＋2D＋2E＋2F，每個鎖有兩把鑰匙。

Ex2：有五個鎖（奇數個），一人三個，任兩人可開（兩人會擁所有的鎖）。 A B C D E 第一個人的 A B C （少 D、E） 則下一個人要有 D、E 第二個人的（再任選 ABC 中一個，例 C） C D E （少 A、B） 則下一個人要有 D、E、A、B（超過三個不合）

總共有兩人。

總共鑰匙為 A＋B＋2C＋D＋E，有一個鎖有兩把鑰匙，其餘的鎖有一把鑰匙。

肆、研究過程

一、任兩人可打開

條件：a－1≧b≧a/2

a－總共有幾個鎖 b－一人擁有幾把鑰匙 c－村莊中人數為 d－一個鎖有幾個鑰匙（d＝e÷a） e－總共鑰匙數（e＝b×c） f－有特別情形之鑰匙數目（f＝e÷a 之餘數）( )－表特別情形中此鑰匙有幾把（d+1）

a	b	c	d	e	f
2	1	2	1	2	
3	2	3	2	6	
4	2	2	1	4	
	3	4	3	12	
5	3	2	1	6	1（2）
	4	5	4	20	
6	3	2	1	6	
	4	3	2	12	
	5	6	5	30	
7	4	2	1	8	1（2）
	5	3	2	15	1（3）
	6	7	6	42	
8	4	2	1	8	
	5	2	1	10	2（2）
	6	4	3	24	
	7	8	7	56	
9	5	2	1	10	1（2）
	6	3	2	18	
	7	4	3	28	1（4）
	8	9	8	72	

⇒由上可發現 d＝c－1

先刪除特別的（即每個鎖有不同鑰匙數）來看，如下：

a－總共有幾個鎖	b－一人擁有幾把鑰匙	c－村莊中人數為
d－一個鎖有幾個鑰匙（d＝e÷a）		e－總共鑰匙數（e＝b×c）

a	b	c	d	e
2	1	2	1	2
3	2	3	2	6
4	2	2	1	4
	3	4	3	12
5	4	5	4	20
6	3	2	1	6
	4	3	2	12
	5	6	5	30
7	6	7	6	42
8	4	2	1	8
	6	4	3	24
	7	8	7	56
9	6	3	2	18
	8	9	8	72

由 d＝c－1 可推斷⇒假設村中有 n 個人，則每個鎖都必有(n－1)把鑰匙。

$d=\frac{e}{a}$、$e=b\times c$

$\Rightarrow (c-1)=(b\times c)\div a\Rightarrow (1-\frac{1}{c})=\frac{b}{a}$

$\Rightarrow (c-1)=\frac{bc}{a}\Rightarrow a(c-1)=b\times c\Rightarrow a(c-1)=e$

此為最大推衍限度，即為須知道 a、b、c 其中任兩個數才能推斷其中關係。
而 c 必為 a 之因數，故 c 會有一種以上的可能性。 c 之可能數為 a 所有因數（1 除外）。

＜目的一＞如果知道箱子上鎖的個數，能夠推演出此制度下，持有鑰匙的人有多少？

> 計算 c 之可能的數量：
> 設 $a=p^{m}\times q^{n}\times r^{o}$（僅用三個質因數為例）
> a 所有的因數之數量為（m＋1）×（n＋1）×（o＋1）－1【扣除 c＝1 的狀

二、任三人可打開

a－總共有幾個鎖　　　　b－一人擁有幾把鑰匙　　　　c－村莊中人數為
d－一個鎖有幾個鑰匙（d＝e÷a）　　　　e－總共鑰匙數（e＝b×c）
f－有特別情形之鑰匙數目（f＝e÷a 之餘數）　（）－表特別情形中此鑰匙有幾把

a	b	c	d	e	f
3	**1**	**3**	**1**	**3**	
4	2	3	1	6	1（3）
5	2	3	1	6	1（2）
	3	3	1	9	2（3）
6	2	3	1	6	
	3	**4**	**2**	**12**	
	4	3	1	12	3（3）
7	3	3	1	9	2（2）
	4	4	2	16	1（4）
	5	3	1	15	4（3）
8	3	3	1	9	1（2）
	4	4	2	16	
	5	4	2	20	2（4）
	6	3	1	18	5（3）
9	3	3	1	9	
	4	3	1	12	3（2）
	5	4	2	20	2（3）
	6	4	2	28	3（4）
	7	3	1	21	6（3）
10	4	3	1	12	2（2）
	5	4	2	20	
	6	**5**	**3**	**30**	
	7	4	2	28	4（4）
	8	3	1	24	7（3）

⇒由上可發現 d＝c－2⇒假設村中有 n 個人，則每個鎖都必有(n－2)把鑰匙。

（一）b＝a－2

a－總共有幾個鎖　　　　　b－一人擁有幾把鑰匙　　　　　　c－村莊中人數為
d－一個鎖有幾個鑰匙（d=e÷a）　　　　　　　　　　　e－總共鑰匙數（e＝b×c）
f－有特別情形之鑰匙數目（f=e÷a 之餘數）　（）－表特別情形中此鑰匙有幾把

a	b	c	d	e	f
3	1	3	1	3	
4	2	3	1	6	1（3）
5	3	3	1	9	2（3）
6	4	3	1	12	3（3）
7	5	3	1	15	4（3）
8	6	3	1	18	5（3）
9	7	3	1	21	6（3）
10	8	3	1	24	7（3）

上表中，c 皆為 3，d 皆為 1，e 為等差數列（差值為 3），而 f 也為一自然數列，( ) 中皆為 3。

b＝a－2，c＝3，d＝1，e＝3×b＝3a－6，f＝a－3，( ) ＝3

說明：當 c＝3 時，無討論意義，因為任三人能開，而總共只有三人，即無意義。
將原表消去 b＝a－2 此類。

（二）b＝a－3

a－總共有幾個鎖　　　　　b－一人擁有幾把鑰匙　　　　　　c－村莊中人數為
d－一個鎖有幾個鑰匙（d=e÷a）　　　　　　　　　　　e－總共鑰匙數（e＝b×c）
f－有特別情形之鑰匙數目（f=e÷a 之餘數）　（）－表特別情形中此鑰匙有幾把

a	b	c	d	e	f
6	3	4	2	12	0
7	4	4	2	16	1（4）
8	5	4	2	20	2（4）
9	6	4	2	24	3（4）
10	7	4	2	28	4（4）

上表中，a＝6 時無例外，故先不討論。而 c 皆為 4，d 皆為 2，e 為等差數列（差值為 4），而 f 也為一自然數列，( ) 中皆為 4。

b＝a－3，c＝4，d＝2，e＝3×b＝4a－12，f＝a－6，( ) ＝4

說明：若 ( ) 中的數＝c 時，即代表至少有一個鎖是每個人都能開的，代表總共只有（a－f）個鎖，一人有（b－f）把鑰匙→a’＝（a－f），b’＝（b－f）。
消去 b＝a－3 此類。

（三）b＝a－4

a－總共有幾個鎖	b－一人擁有幾把鑰匙	c－村莊中人數為
d－一個鎖有幾個鑰匙（d＝e÷a）		e－總共鑰匙數（e＝b×c）
f－有特別情形之鑰匙數目（f＝e÷a 之餘數）		（）－表特別情形中此鑰匙有幾把

a	b	c	d	e	f
6	2	3	1	6	
7	3	3	1	9	2（2）
8	4	4	2	16	
9	5	4	2	20	2（3）
10	6	5	3	30	
11	7	5	3	35	2（4）
12	8	6	4	48	
13	9	6	4	54	2（5）
14	10	7	5	70	
15	11	7	5	77	2（6）
16	12	8	6	96	

此表格符合特定規則，如下：

當 a＝2n（偶數）【已知 b＝a－4】

$\Rightarrow c=\frac{a}{2}$，$e=b\times c=(a-4)(\frac{a}{2})=\frac{a(a-4)}{2}$，$d=\frac{e}{a}=\frac{(a-4)}{2}$

當 a＝2n＋1（奇數）【已知 b＝a－4】

$\Rightarrow c=\frac{(a-1)}{2}$，$e=b\times c=\frac{(a-1)(a-4)}{2}$，$d=\frac{(a-5)}{2}$，$f=2$，$(\,)=\frac{(a-3)}{2}$

當 a＝6，7 時，c＝3，即為上述所說無意義的情形，刪去不討論→則 a≧8。

＊a 為奇數時，有 f 和（），與「每把鎖有相同鑰匙」條件不合。故刪去不看，即得以下結論。

結論（n 為偶數）：假設有 n 個鎖，每一把鎖都必須有$\frac{(n-4)}{2}$把鑰匙，有$\frac{n}{2}$個人，

共$\frac{n(n-4)}{2}$把鑰匙。

（四）將原表粗體的分開來看（即 n≠3 也無例外者，a＝3 不算在內）

a－總共有幾個鎖	b－一人擁有幾把鑰匙	c－村莊中人數為
d－一個鎖有幾個鑰匙（d＝e÷a）		e－總共鑰匙數（e＝b×c）

a	b	c	d	e
3	1	3	1	3
6	3	4	2	12
10	6	5	3	30

由 d＝c－2 可推斷⇒假設村中有 n 個人，則每個鎖都必有(n－2)把鑰匙。

又發現 a＝（b＋c－1）、$d=\frac{e}{a}$、e＝b×c

$\Rightarrow$（c－2）$=\frac{bc}{a}$　　$\Rightarrow$（$1-\frac{2}{c}$）$=\frac{b}{a}$..........【1】

（c－2）$=\frac{bc}{a}$ $\Rightarrow$ a（c－2）＝bc $\Rightarrow$ a（c－2）＝e

a＝（b＋c－1）$\Rightarrow$ b＝（a－c＋1）代入【1】$\Rightarrow$（$1-\frac{2}{c}$）$=\frac{a-c+1}{a}$

$\Rightarrow$（$1-\frac{2}{c}$）$=1-\frac{c-1}{a}$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{c}=\frac{c-1}{a}$ $\Rightarrow$ 2a＝c2－c

$\Rightarrow a=\frac{c(c-1)}{2}$ $\Rightarrow e=\frac{c(c-1)(c-2)}{2}$

觀察上表，發現此類的 a 數值的差值，會呈現自然數排列：3、4…，即 a 數值為一階差數列。故我們推測下一個此類的數為 a＝15。代入上面推導之公式→a＝15、b＝10、c＝6、d＝4、e＝60，列舉出來後發現結果相符，故推測正確。

$\Rightarrow a_n=3+\sum_{k=0}^{n-2}k+3$，$b_n=\sum_{k=0}^{n-2}k+2$

※a 與 b 皆為階差數列，又 $b_n=a_n-1$。
c 與 d 為等差數列。

下表為符合此規則的完整結果：

a	b	c	d	e
3	1	3	1	3
6	3	4	2	12
10	6	5	3	30
15	10	6	4	60
21	15	7	5	105
28	21	8	6	168
36	28	9	7	252
45	36	10	8	360

說明：假設村中有 n 人，每一把鎖都必須有（n－2）把鑰匙，否則會導致有某三人來仍然無法打開，又任兩人都會有一把打不開的鎖，這把鎖與其他任兩人組合的鎖皆不同（否則此三或四人仍然無法開啟），故需要$\frac{n(n-1)}{2}$把鎖，共$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$把鑰匙。

結論：假設村中有 n 人，每一把鎖都必須有(n－2)把鑰匙，有$\frac{n(n-1)}{2}$把鎖，共$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$把鑰匙。

三、任四人可打開

※分類（n≠4 也無例外者，a＝4 不算在內）

a	b	c	d	e
4	1	4	1	4
10	5	6	3	30
14	8	7	4	56
24	16	9	6	144
30	21	10	7	210
44	33	12	9	396
52	40	13	10	520
70	56	15	12	840

由 d＝c－3 可推斷⇒假設村中有 n 個人，則每個鎖都必有（n－3）把鑰匙。

又發現 a＝（b＋c－1）、$d=\frac{e}{a}$、e＝b×c

$\Rightarrow (c-3)=\frac{bc}{a} \Rightarrow (1-\frac{3}{c})=\frac{b}{a}$..........【1】

$(c-3)=\frac{bc}{a} \Rightarrow a(c-3)=bc \Rightarrow a(c-3)=e$

a＝（b＋c－1）⇒ b＝（a－c＋1）代入【1】$\Rightarrow (1-\frac{3}{c})=\frac{a-c+1}{a}$

$\Rightarrow (1-\frac{3}{c})=1-\frac{c-1}{a} \Rightarrow \frac{3}{c}=\frac{c-1}{a} \Rightarrow 3a=c^2-c$

$\Rightarrow a=\frac{c(c-1)}{3} \Rightarrow e=\frac{c(c-1)(c-3)}{3}$

※觀察上表，將表格分兩部分看，如下表（一）及（二）:

（一）2n－1 項

第幾項	a	b	c	d	e
1	4	1	4	1	4
3	14	8	7	4	56
5	30	21	10	7	210
7	52	40	13	10	520

發現此類的 a 數值的差值，會呈現一等差數列：10、16…，即 a 數值為一階差數列。故我們可推測下一個此類的數為 80。又發現此類的 b 數值的差值，會呈現一等差數列，即 7、13…，故我們可推測下一個此類的數為 65。代入上面推導之公式→a＝80、b＝65、c＝16、d＝13、e＝1040 合，正確。

$\Rightarrow a_{2n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}6k+4$，$b_{2n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}6k+1$

※a 與 b 皆為階差數列的現象。

c 與 d 為等差數列（差值為 3）。

（二）2n 項

第幾項	a	b	c	d	e
2	10	5	6	3	30
4	24	16	9	6	144
6	44	33	12	9	396
8	70	56	15	12	840

發現此類的 a 數值的差值，會呈現一等差數列：14、20…，即 a 數值為一階差數列。故我們可推測下一個此類的數為 102。又發現此類的 b 數值的差值，會呈現一等差數列，即 11、17…，故我們可推測下一個此類的數為 85。代入上面推導之公式→a＝102、b＝85、c＝18、d＝15、e＝1530 合，正確。

$\Rightarrow a_{2n}=2+\sum_{k=0}^{n-1}6k+8$，$b_{2n}=\sum_{k=0}^{n-1}6k+5$

※a 與 b 皆為階差數列的現象。
c 與 d 為等差數列（差值為 3）。

下表為符合此規則的完整結果：

a	b	c	d	e
4	1	4	1	4
10	5	6	3	30
14	8	7	4	56
24	16	9	6	144
30	21	10	7	210
44	33	12	9	396
52	40	13	10	520
70	56	15	12	840
80	65	16	13	1040

說明：假設村中有 n 人，每一把鎖都必須有（n－3）把鑰匙，否則會導致有某三人來仍然無法打開，又任兩人都會有一把打不開的鎖，這把鎖與其他任兩人組合的鎖皆不同（否則此四或五人仍然無法開啟），故需要$\frac{n(n-1)}{3}$把鎖，共$\frac{n(n-1)(n-3)}{3}$把鑰匙。

結論：假設村中有 n 人，每一把鎖都必須有(n－3)把鑰匙，有$\frac{n(n-1)}{3}$把鎖，共$\frac{n(n-1)(n-3)}{3}$把鑰匙。

四、任 x 人可打開

a－總共有幾個鎖	b－一人擁有幾把鑰匙	c－村莊中人數為
d－一個鎖有幾個鑰匙（d＝e÷a）		e－總共鑰匙數（e＝b×c）

a	b	c	d	e
x	1	x	1	x
4x－6	2x－3	2x－2	x－1	$4x^2$－10x＋6
4x－2	2x	2x－1	x	$4x^2$－2x
9x－12	6x－8	3x－3	2x－2	$18x^2$－42x＋24
9x－6	6x－3	3x－2	2x－1	$18x^2$－21x＋6
16x－20	12x－15	4x－4	3x－3	$48x^2$－108x＋60
16x－12	12x－8	4x－3	3x－2	$48x^2$－68x＋24
25x－30	20x－24	5x－5	4x－4	$100x^2$－220x＋120
25x－20	20x－15	5x－4	4x－3	$100x^2$－155x＋60

說明：假設村中有 n 人，每一把鎖都必須有（n－x＋1）把鑰匙，否則會導致有某 x 人來仍然無法打開，又任（x－1）人都會有一把打不開的鎖，這把鎖與其他任（x－1）人組合的鎖皆不同（否則此 x 或（x＋1）人仍然無法開啟），故需要$\frac{n(n\text{-}1)}{(x\text{-}1)}$鎖，共$\frac{n(n\text{-}1)(n\text{-}x\text{+}1)}{(x\text{-}1)}$鑰匙。

（一）2n－1 項

$$\Rightarrow a_{2n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+x\text{，}b_{2n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+1$$

※a 與 b 皆為階差數列的現象。
c 與 d 為等差數列（差值為 x－1）。

（二）2n 項

$$\Rightarrow a_{2n}=(x-2)+\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+3(x-2)+2\text{，}b_{2n}=\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+2(x-2)+1$$

※a 與 b 皆為階差數列的現象。
c 與 d 為等差數列（差值為 x－1）。

五、討論數列關係

（一）回到任兩人能開討論關係

a	b	c	d	e
2	1	2	1	2
6	4	3	2	12
12	9	4	3	36
20	16	5	4	80
30	25	6	5	150
42	36	7	6	252

發現此類 b 數值均為一完全平方數，開根出來為一自然數列。

（二）回到任四人能開討論關係

a	b	c	d	e
4	$1=1^2-0$	4	1	4
10	$5=2^2+1$	6	3	30
14	$8=3^2-1^2$	7	4	56
24	$16=4^2+0$	9	6	144
30	$21=5^2-2^2$	10	7	210
44	$33=6^2-3$	12	9	396

發現此類 b 數列的奇數項和偶數項分別有一特定規律，寫出通式如下：

$b_{2n-1}=(2n-1)^2-(n-1)^2=n(3n-2)$

$b_{2n}=[(2n)^2+1]-(n-1)^2=n(3n+2)$

（三）回到任五人能開討論關係

a	b	c	d	e
5	$1=1^2+0$	5	1	5
14	$7=2^2+3$	8	4	56
18	$10=3^2+1$	9	5	90
33	$22=4^2+6$	12	8	264
39	$27=5^2+2$	13	9	351
60	$45=6^2+9$	16	12	720

$b_{2n-1}=(2n-1)^2+(n-1)=n(4n-3)$

$b_{2n}=(2n)^2+3n=n(4n+3)$

由此可推斷 b 數列的一般式為

$\mathbf{b_{2n-1}=n[(x-1)n-(x-2)]}$

$\mathbf{b_{2n}=n[(x-1)n+(x-2)]}$

肆、目的推論

一、如果知道箱子上鎖的個數，能夠推演出此制度（任三人開）下，持有鑰匙的人有多少？

Sol：此題即為由 a 推 c，設 a＝x。

$x=\frac{c(c-1)}{(3-1)} \Rightarrow 2x=c(c-1) \Rightarrow c=\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}$（負不合）

條件：1＋8x 需為奇數的完全平方數，c 方能為一整數。

二、採用另一種封建規則，每個村民依重要性分級（1 為最重要），村長要求安排如下：第 x 等級最少要有 x 人存在。則此規則為何？

＊以下數值皆用 c（人數）表示關係

$a=\frac{c(c-1)}{(x-1)}$ ，$b=\frac{(c-1)(c-x+1)}{(x-1)}$，$d=(c-x+1)$，$e=\frac{c(c-1)(c-x+1)}{(x-1)}$

伍、結論

假設村中有 n 人，欲使任 x 人打開；則每一把鎖都必須有（n－x＋1）把鑰匙，否則會導致有某 x 人來仍然無法打開，又任（x－1）人都會有一把打不開的鎖，這把鎖與其他任（x－1）人組合的鎖皆不同（否則此 x 或（x＋1）人仍然無法開啟），故需要$\frac{n(n-1)}{(x-1)}$鎖，共$\frac{n(n-1)(n-x+1)}{(x-1)}$鑰匙。

一、2n－1 項

$$\Rightarrow a_{2n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+x\text{，}b_{2n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+1$$

※a 與 b 皆為階差數列的現象。

c 與 d 為等差數列（差值為 x－1）。

二、2n 項

$$\Rightarrow a_{2n}=(x-2)+\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+3(x-2)+2\text{，}b_{2n}=\sum_{k=0}^{n-1}[2(x-1)]k+2(x-2)+1$$

※a 與 b 皆為階差數列的現象。

c 與 d 為等差數列（差值為 x－1）。

陸、討論與建議

在一開始完全不了解的情況下，慢慢推斷其中的關係，不斷嘗試與試驗，漸漸發現規律的變化，是一種心情的激動，在鎖與鑰匙中翻騰。從簡而繁，幾乎任何方法都試驗過了，最後找出一個關係公式，能夠把所有問題涵括進去，就是我們的目標，可以從完全沒有頭緒漸漸明朗化，不僅推出公式，也找出最方便最迅速的計算方式，列舉出所有情形也不再困難了。我想專研就是在問題中探索規律，尋覓出一些公式，並從中學得些什麼，才是真正重要的。

柒、參考文獻

數學思考【九章出版社】

捌、謝誌

我要特地感謝陪伴我這一年來的專研老師－阿貴老師，他幾乎兩週就要聽一次我們每一組所做的進度及發展，因為他在數學上的努力，讓我看到了另一面與眾不同的數學思考，我希望能夠循著他教導我們的路徑行走，走出一片我們自己所能夠自己思索的路線，找到一片不同的天空。我衷心的謝謝他！