1 貪心法

由於貪心法的證明實在太重要了，本次作業將讓大家練習許多證明。貪心法的證明往往如以下的形式：由我們提出來的貪心演算法可以得到一組解 S ，而且這個解會滿足一些特性 (視算法而定)。接著，對於任意一組不滿足該特性的解 S' ，我們都可以構造出一組更好的解 S'' ，如果 S'' 仍然不滿足該特性，我們又可以構造出更好的解 $S''' \cdots$ ，最後得到 S ，如此一來就可以證明 S 是最優的解了。

複習一下影片中提到的「誰先晚餐」問題，經簡化的題目是這樣的：

例題 1

有 n 位同學要吃晚餐，第 i 位同學想吃的食物需要 C_i 時間才能煮好，而他吃掉食物所花的時間為 E_i ，且廚師同一時間只能煮一種食物。請證明，要讓廚師開始煮菜到最後一位同學吃完，經過的時間最短的方法是讓吃飯時間 (E_i) 越久的越先吃。

解答

假設由演算法得到的吃飯的順序為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，則此序列一定滿足特性 $E_{a_i} \geq E_{a_{i+1}}$ 。假設有另外一組吃飯順序為 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，且不滿足該特性，則一定存在兩個相鄰的人 b_i, b_{i+1} 滿足 $E_{b_i} < E_{b_{i+1}}$ 。如果將這兩個人的吃飯順序對調，則考慮第 j 個人吃飯結束的時間 (對調前為 $t_1(j)$ ，對調後為 $t_2(j)$ ，可以以下四種人的情況：

(1) $j < i$：

對調前，結束的時間為 $t_1(j) = \sum_{k=1}^{j} C_{b_k} + E_{b_j}$；

對調後，結束的時間為 $t_2(j) = \sum_{k=1}^{j} C_{b_k} + E_{b_j}$。

(2) $j = i$：

對調前，結束的時間為 $t_1(j) = t_1(i) = \sum_{k=1}^{i-1} C_{b_k} + C_{b_i} + E_{b_i}$；

對調後，結束的時間為 $t_2(j) = t_2(i) = \sum_{k=1}^{i-1} C_{b_k} + C_{b_{i+1}} + C_{b_i} + E_{b_i}$。

(3) $j = i+1$：

對調前，結束的時間為 $t_1(j) = t_1(i+1) = \sum_{k=1}^{i-1} C_{b_k} + C_{b_i} + C_{b_{i+1}} + E_{b_{i+1}}$；

對調後，結束的時間為 $t_2(j) = t_2(i+1) = \sum_{k=1}^{i-1} C_{b_k} + C_{b_{i+1}} + E_{b_{i+1}}$。

(4) $j > i+1$：

對調前，結束的時間為 $t_1(j) = \sum_{k=1}^{j} C_{b_k} + E_{b_j}$；

對調後，結束的時間為 $t_2(j)=\sum\limits_{k=1}^{j} C_{b_k}+E_{b_j}$。

我們要比較的是 $\max\{t_1(j)\}$ 和 $\max\{t_2(j)\}$ $(1 \le j \le n)$ ，可以發現會讓 $t_1(j)$ 和 $t_2(j)$ 不同值的只有 $j=i$ 和 $j=i+1$ ，而且 $t_1(i+1) \ge t_2(i)$ $(\because E_{b_{i+1}} > E_{b_i}), t_1(i+1) \ge t_2(i+1)$ ，所以 $\max\{t_1(j)\} \ge \max\{t_2(j)\}$，也就是對調之後，最後吃完的時間一定不會比對調前差。
最後，經過不斷的兩兩對調，一定可以將序列 b 變成序列 a (如 bubble sort 的過程)，且過程中，最後吃完的時間必為非嚴格遞減，得證序列 a 是這個問題的最優解。

習題

1. 在影片中提到了換零錢的題目，敘述如下：已知有 n 種貨幣面額 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ，不失一般性可以假設 $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$。對於任意兩種面額 c_i, c_j $(i < j)$，滿足 c_j 一定是 c_i 的倍數，也就是 $c_i | c_j$ ，而且為了確保所有整數的金額都可以湊出，$c_1 = 1$ (例如台灣的硬幣去掉 20 元就滿足這些要求)。對於任意正整數 x ，請問如何使用盡量少的零錢個數湊出 x 元呢？

   (a) (30 pts) 請證明在題目的條件之下，盡量使用面額較高的零錢可以得到最佳解。意即要湊出 x ，可以先使用一枚面額不大於 x 的最大面額零錢 c_i ，剩下的 $x - c_i$ 元用相同的方法湊出。

   (b) (10 pts) 在不滿足 $\forall i < j, c_i | c_j$ 的情況下，第一題的貪心算法仍然可以得到最佳解嗎？如果可以，請證明之（可以的意思是不論面額和要湊出的金額為多少，貪心算法得到的解都是正確的）；如果不行，請給出造成反例的面額 $c_1 \cdots c_n$ 、欲湊出的金額 x 、使用貪心法得到的解以及能比貪心法得到的解使用更少個零錢的解。

   (c) (20 pts) 在不滿足 $\forall i < j, c_i | c_j$ 的情況下，第一題的貪心算法一定不能得到最佳解嗎？如果不行，請證明之；如果可以，請給出一組貪心法適用的面額 $c_1 \cdots c_n$ ，並證明在該組面額上，使用貪心法湊出任意金額都可以得到最佳解。

2. (40 pts) 已知 n 個區間 $(l_1, r_1), (l_2, r_2), \cdots, (l_n, r_n)$ ，希望可以挑選出盡量多個不重疊的區間。請證明先將區間照右界 (r_i) 由小到大排序後，依序挑選與當前挑出的區間不重疊的區間，如此可以挑選出最多的區間。

   (例：有四個區間 $(1, 4), (2, 5), (3, 7), (6, 8)$ ，則上述貪心演算法會依序挑選 $(1, 4)$ 和 $(6, 8)$ ，得到最多可以挑選出 2 個區間。當然最佳解不唯一，演算法也可以改成照區間左界由大到小排序，此時挑選出的區間就是 $(6, 8)$ 和 $(2, 5)$ ，但區間數量仍然是最大值。)

3. (20 pts) 考慮以下的可分割背包問題：你有一個承重最多 L 的背包，並有 n 個物品，其中第 i 個有重量 w_i 與價值 c_i，每個物品都可以分割，也就是說，對於任意第 i 個物品，你可以選擇要只帶其中 p $(0 \leq p \leq 1)$ 的部分。此時帶這個物品的重量與效用就分別是 pw_i 與 pc_i。

   請證明以下策略為最優解：將物品以 $\frac{c_i}{w_i}$ 由大至小排序，由前往後，如果能取完整個物品則取，不能（背包滿了）則只取剛好讓背包滿的那部分。