

課題: Popular Matchings

DATE

NO.

起源:

首見於 [Behavioural Sciences 1975] P. Gärdenfors 的作品
Match Making: assignments based on bilateral preferences.

該論文主要探討 weak ordering preference lists 版本的 stable marriage problem. 但在文中亦談到 popular matching, 並證明「Popular 必 stable」, 以及「若 preference lists 均 linear ordering, 則 stable assignments 均 popular」與「Popular matching 未必存在」

近年發展

↑ 持續推出相關作品

1. [SODA 2005] 由 Abraham, Irving, Telikepalli, Mehlhorn 等人撰寫的 Popular Matchings 提出第一個「能在 poly-time 分辨率一個 instance 是否存在 popular matching, 若存在時, 找出一個 cardinality 最大的 popular matching」

▲ linear orderings 版本 (without ties) = $O(n+m)$ time

▲ weak orderings 版本 (with ties) = $O(Jn m)$ time

n : applicants 及 posts 個數總和

m : 所有 preference lists 的長度總和

● 本文亦證明 with ties 版本 problem 的 complexity 不低於 max-cardinality bipartite matching problem, 後者的最佳解亦為 $O(n+m)$

2. [ICALP 2006] Julian Mestre 替 Popular Matchings problem 引入 agents' weights 的概念, 給予每個 agent 一個重要性 (weight)。如此, 使 Weighted Popular Matchings Problem 更適切地吻合許多應用。

▲ Popular than 的定義改成: 「當 prefer M 者之 weight 和 $>$ prefer M' 者之 weight 和 時, 稱 M is more popular than M' 」

該論文提出 polynomial time algorithms

▲ without tie 版本: $O(n+m)$ time

▲ with tie 版本: $O(\min(k\sqrt{n}, n) \cdot m)$ time

k 係 the number of distinct agent weights

★ 接續之 篇文章, 在找出 popular matching 的前提下, 再外加一個額外的目標 (objective), 希望找出所有 popular matchings 中, 最佳的一個。

3. [DAM 2009] Optimal popular matchings by Telikepalli & Mahghan 作者提出一個 general algorithm, 在 popular matchings 存在的情況下, 找出最 "optimal" 的一個 popular matching。

其中, 評比 2 個 popular matchings 的條件可以是 ① rank-maximality ② fairness ③ minimum cost of matched edges 等具備共同條件的 criteria

▲ without tie 版本: $O(n^2+m)$ time

4. [COCOON 2009] Popular matchings: structure and algorithms
 作者 McDermid 及 Irving 兩人提出一種 data structure 叫做 switching graph, 可在 linear time 自 preference lists 建出。
 該 graph 適用於解決一些 popular matching 相關的問題, 如 ① 計算某 instance 存在的 popular matchings 个数 ② 列舉 ① 中所有 matchings ③ 找出所有 popular matching 中, 滿足額外 optimality criteria 的。

前述 ③, 恰與前頁提及的 [DAM 2009] 處理相同問題, 並提出更有效率的作法。

time complexity

	[COCOON 09]	[DAM 09]
min-cost	$O(n+m)$	$O(n^2+m)$
rank-max	$O(n \log n + m)$	$O(n^2+m)$
fair	$O(n \log n + m)$	$O(n^2+m)$
實作	難	易

★ 第5篇是比較特別的一篇, 自成一路

5. [ICALP 2009] Popular Mixed Matchings

作者 Telikepalli, Julian, Meghana 等人認為 "popular" 的性質固然自然, 但終究不夠好 (有些 instance 不存在 popular matching 的解)。於是他們提出 mixed matching 的概念, 摒棄過往找一個 matching 的目標, 改成找一組 matchings (如 $M_1, M_2, \dots, M_k$), 再給每個 matching M_i 一個機率 P_i , 其中 $0 \leq P_i \leq 1$ 且 $\sum P_i = 1$ 。

過去比較 M_1, M_2 的 popularity 是看 $\phi(M_1, M_2)$ 及 $\phi(M_2, M_1)$ 的大小
 其中 $\phi(M_1, M_2) = |\{a \in A : a \text{ prefers } M_1 \text{ to } M_2\}|$

現在比較二組 mixed matching $P = \{(M_1, P_1), (M_2, P_2), \dots, (M_k, P_k)\}$
 $Q = \{(T_1, q_1), (T_2, q_2), \dots, (T_k, q_k)\}$

當作比較 $\phi(P, Q)$ 與 $\phi(Q, P)$ 的大小

$$\text{其中 } \phi(P, Q) = \sum_i \sum_j P_i q_j \phi(M_i, T_j)$$

該文證明 popular mixed matchings 必定存在, 且提出一個用 Linear Programming 的方法, 在 polynomial time 找出 solution.

?? 應用為何??

接著2篇允許 posts 一對多, 但給允每個 post 容量上限
 ※其實非 matching 3 2篇作者相同

6. [ESA 2006] Popular Matchings in the Capacitated House Allocation Problem by Manlove and Galin

Capacitated House Allocation problem (CHA) 把 agents 分配到 posts (houses) 中, 但每間房子有容量上限。

without ties 版: $O(\sum n_i + m)$ time

with ties 版: $O((C + n_i) \cdot m)$ time

n_i : the number of agents

C : the total capacity of houses

7. [Journal of Discrete Algorithms 2010] Popular matchings in the Weighted Capacitated House Allocation Problem (WCHA)

與上文相同前提, 惟新增 agents' weights, 用來比較 2 个 matchings 的 popularity。

without ties 版: $O(\sum n_i + m)$ time

✧ 第8篇較前2篇更甚,連 agents 也被允許一對多,而每個 agent 亦有其容量上限。 (多對多)

8. [Submitted on 2010~2011] Popular b-Matchings by Katarzyna
Given $G=(A \cup H, E)$, 其中每個 node (含 A 及 H) 均有其 capacity 上限, 並給予一個 edge rank function $r: E \rightarrow \mathbb{N}$ 。欲找出一個符合所有容量限制, 且 popular 的 matching。

▲ 對任一個 agent a 而言, 比較 2 個 matchings M_1, M_2 的方法類似奧運決定名次的方法, 先看金牌枚, 再看銀牌, ... 依此類推。

▲ Popular b-matching problem = NP-hard
even when edge rank 只分 2 級且所有 capacity 至多是 2

▲ 另定一種 popularity 性質叫 = weakly popular b-matchings
- 改前述奧運排名法, 改採總積分方式比較 2 種 matchings

6

▲ Weakly Popular b-matchings = NP-hard
even when ranks 只分 3 級, no ties, 且 house capacity 全為 1

與

▲ 若 weakly popular b-matchings

what

I

tried

to

solve

相

似

with ranks 只分 2 級, no ties, 且 house capacity 全為 1

則 poly-time 可解,

本文有一個 algorithm.

9. Random Popular Matchings by Mohammad [ACM conference on Electronic Commerce 2006]

探討 popular matchings 存在的機率大小。

Given n 個 agents, αn 個 posts (α 是个不大的常数),
preference lists ^{are} randomly generated.

經證明, 當 α 超過 1.42 以上時, popular matching 幾乎必然存在。

★ 第10~13篇

已知 given an instance, popular matching 未必存在,
這4篇論文著重於「當 given instance 無 popular matching
時,如何給一個建議的 matching」

★ 第10~11篇

試圖放鬆/加強限制,將 instance 改為另一個是 popular 的 instance.

10. [Annual International Symposium on Algorithms and Computation 2009].
Popular Matchings with variable job capacities
作者 Telikepalli, Meghana

考慮 CHA problem, 若 given instance 不存在 popular matching,
「判斷是否存在一種下修 house capacity 的方法,能使得新的
instance 是 popular 性質」

※ 雖 new instance 的 popular solution 亦符合原 instance 限制,
但未必仍可打敗 all 競爭者,脫穎而出成為 popular

◆ NP-hard

even when house capacity 全為 1 or 2

本文考慮若干 special case, 並提供 poly-time 解法

11. [ISAAC 2010] Popularity at Minimum Cost

作者 Telikepalli, Meghana, Prajakt

把 popular matchings problem 中的 posts 想成百視達中的 DVD, 若 given instance 不是個 popular matchings. 考慮複製部分 DVD, 以造出個 popular matching 的 instance, 並按 popular matching 分配。

假設每片 DVD 的複製成本不一, 欲求成本最低的方式進行。

NP-hard

連 approximate within a factor of $\sqrt{n_i}/2$ 都 NP-hard
 n_i : the number of people

若每個人的 preference list 長度至多為 2, 則存在 poly time 解法。

若規定每個 DVD 的 copy 數量固定, 則可在 $O(m \cdot n_i)$ time 解決。

12. [LATIN 2008] The least-unpopularity-factor and least-unpopularity margin criteria for matching problems with one sided preferences by McCutchen

若 Given instance 不具备 popular matching, 希望找出离 popular 最近的一个 matching。
有 2 种方式衡量是远近

- ① 比较 2 个 matching 擁護者的 比例
- ② $\quad \quad \quad$ 人数差异

① $u(M) = \max_{M'} \Delta(M, M')$

其中 $\Delta(x, y) = \begin{cases} \phi(y, x) / \phi(x, y) & \text{if } \phi(x, y) > 0 \\ 1 & \text{if } \phi(x, y) = \phi(y, x) = 0 \\ \infty & \text{others} \end{cases}$

② $g(M) = \max_{M'} \delta(M, M')$

其中 $\delta(x, y) = \phi(y, x) - \phi(x, y)$

NP-hard for 2 cases

证明: 一旦 given G 不具 popular matching, 则 $u(M) \geq 2$ for all M

13. [SWAT 2008] Bounded Unpopularity Matchings by Telikepalli, Huang, ... 等人

参考第12篇, 提出一個 $O(m\sqrt{n})$ time 方法, 能找出 $U(M) \leq 2$ 的 matching

在 special case 下, 可保證找到符合
 $U(M) \leq k-1$ 且 $g(M) \leq n(1 - \frac{2}{k})$ 的解
 其中 k 為 graph sequence 的長度。

第14篇為 Popular Matching Problem 的 'Dynamic', 'Incremental' 版 14. [SWAT 2006] Dynamic Matchings Markets and Voting Paths by Abraham and Telikepalli

Given instance G , 並求出 popular matching M_0 後, 允許 posts, agents 加入退出, 而 preference lists 亦可變動。變動後, M_0 可能不再 popular。希望找出一條 shortest-length voting path $M_0, M_1, \dots, M_k$ 使 M_0 變成 M_k , 而 M_k 是 popular。

其中相鄰2個 matching 有 'more popular than' 關係。

註: more popular than ~~是~~ transitive 性質。

ex: $M_0 < M_1$ 且 $M_1 < M_2$ 但未必 $M_0 < M_2$

證明: 只要 instance 改變後仍是 popular matching, 必有 2-step 的 voting path。

該文亦提出一個找出 shortest-voting-paths 到達任何 given popular matching 的作法 in linear time。