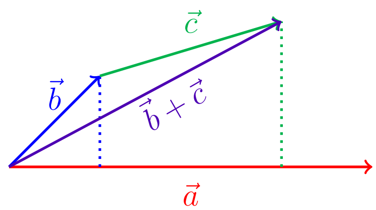
先從物理的觀點來看內積，也就是視為做功。 即

$$I(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

首先先去感受內積是一個多線性函數，也就是他滿足加性和齊性。 請用下圖，去感受一下此式。

$$I(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = I(\vec{a},\vec{c}) + I(\vec{b},\vec{c})$$



因為線性結構所以在坐標上就有很好的運算性質。

$$\begin{aligned}
&I((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \qquad (\text{Let } (1,0)=\vec{i},(0,1)=\vec{j})\\
=&I(x_1\vec{i}+y_1\vec{j},x_2\vec{i}+y_2\vec{j})\\
=&x_1x_2I(\vec{i},\vec{i})+x_1y_2I(\vec{i},\vec{j})+y_1x_2I(\vec{j},\vec{i})+y_1y_2I(\vec{j},\vec{j})\\
=&x_1x_2+y_1y_2
\end{aligned}$$

最後一行根據定義，同方向的單位方向構成的內積為 1，重直的單位方向構成的內積為 0， 所以有

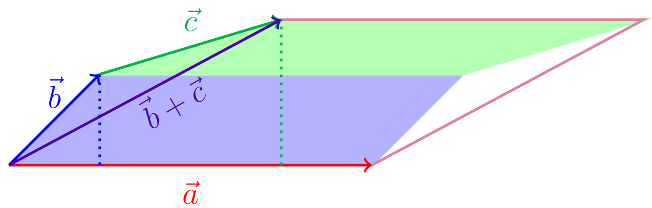
$$I(\vec{i},\vec{j}) = I(\vec{j},\vec{i}) = 0, I(\vec{i},\vec{i}) = I(\vec{j},\vec{j}) = 1$$

面積(體積) 函數亦有線性的結構，在此以二維作說明：

$$A(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

首先先去感受面積是一個多線性函數，也就是他滿足加性和齊性。 請用下圖，去感受一下此式。

$$A(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = A(\vec{a},\vec{c}) + A(\vec{b},\vec{c})$$



因為線性結構所以在坐標上就有很好的運算性質。

$$\begin{aligned}
&A((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \qquad (\text{Let } (1,0)=\vec{i},(0,1)=\vec{j})\\
=&A(x_1\vec{i}+y_1\vec{j},x_2\vec{i}+y_2\vec{j})\\
=&x_1x_2A(\vec{i},\vec{i})+x_1y_2A(\vec{i},\vec{j})+y_1x_2A(\vec{j},\vec{i})+y_1y_2A(\vec{j},\vec{j})\\
=&x_1y_2-x_2y_1
\end{aligned}$$

最後一行根據定義，同方向的單位方向構成的面積為 0，重直的單位方向構成的面積為 1 或 -1 (逆時針為正) 所以有

$$A(\vec{i},\vec{j})=1, A(\vec{j},\vec{i})=-1, A(\vec{i},\vec{i})=0, A(\vec{j},\vec{j})=0$$

線性結構的最主要精神，即為化繁為簡，以簡馭繁。

中國人早在三千年前，並懂此道裡，以韓信點兵為例， $N(a,b,c)$ 為一除 3 餘 a ，除 5 餘 b ，除 7 餘 c 之數。 因為餘數有線性加成的特性：

$$N(a,b,c) = aN(1,0,0) + bN(0,1,0) + cN(0,0,1)$$

因為 $N(1,0,0) = 70,\ N(0,1,0) = 21,\ N(0,0,1) = 15$ ，所以 $N(a,b,c) = 70a + 21b + 15c$，其實國小課本的餘數問題，不用餘數相同也是可以很快的解決。

例如：除 3 餘 1 ，除 5 餘 2 ，除 7 餘 3 之數，即為 $N(a,b,c) = 70 + 42 + 45 = 52 \mod 105$