

紅黑樹

Michael Tsai

2017/05/16

紅黑樹

- 可以幹嘛?
- 是棵平衡的樹: 保證從root到某個leaf的simple path一定不會超過從root到任何一條其他這樣的path的兩倍長
- 大概平衡→operation可以都在 $O(\log n)$ 內完成. 耶.

- 那些operation?
 - 1. 找
 - 2. 插入某element
 - 3. 殺掉某element
 - 4. 找最大or找最小element
 - 5. 找某一個element的下一個(successor)或前一個element (predecessor)

紅黑樹

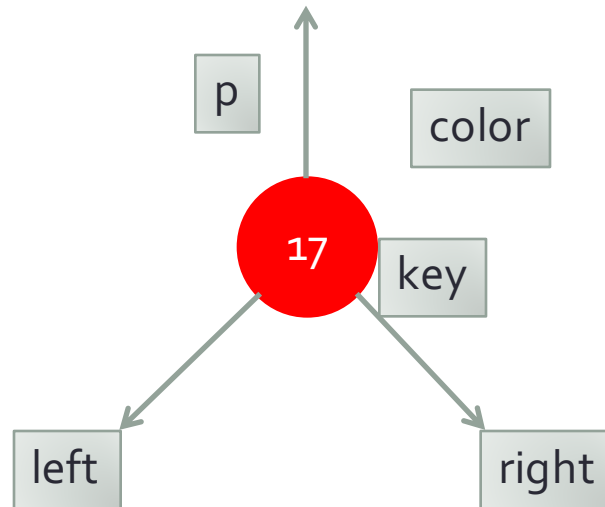
- 每個node都分配一個顏色: 紅或黑
- 沒有children的地方都補上external node, 又叫NIL

- 規則們:
 - 1. 每個node不是黑就是紅
 - 2. root是黑色的
 - 3. 每個leaf (external node, or NIL)都是黑色
 - 4. 如果一個node是紅的, 則它的兩個小孩都是黑的
 - 5. 對每個node來說, 從它到它的所有子孫葉子node的路徑上含有一樣數目的黑色node (不包含他自己)

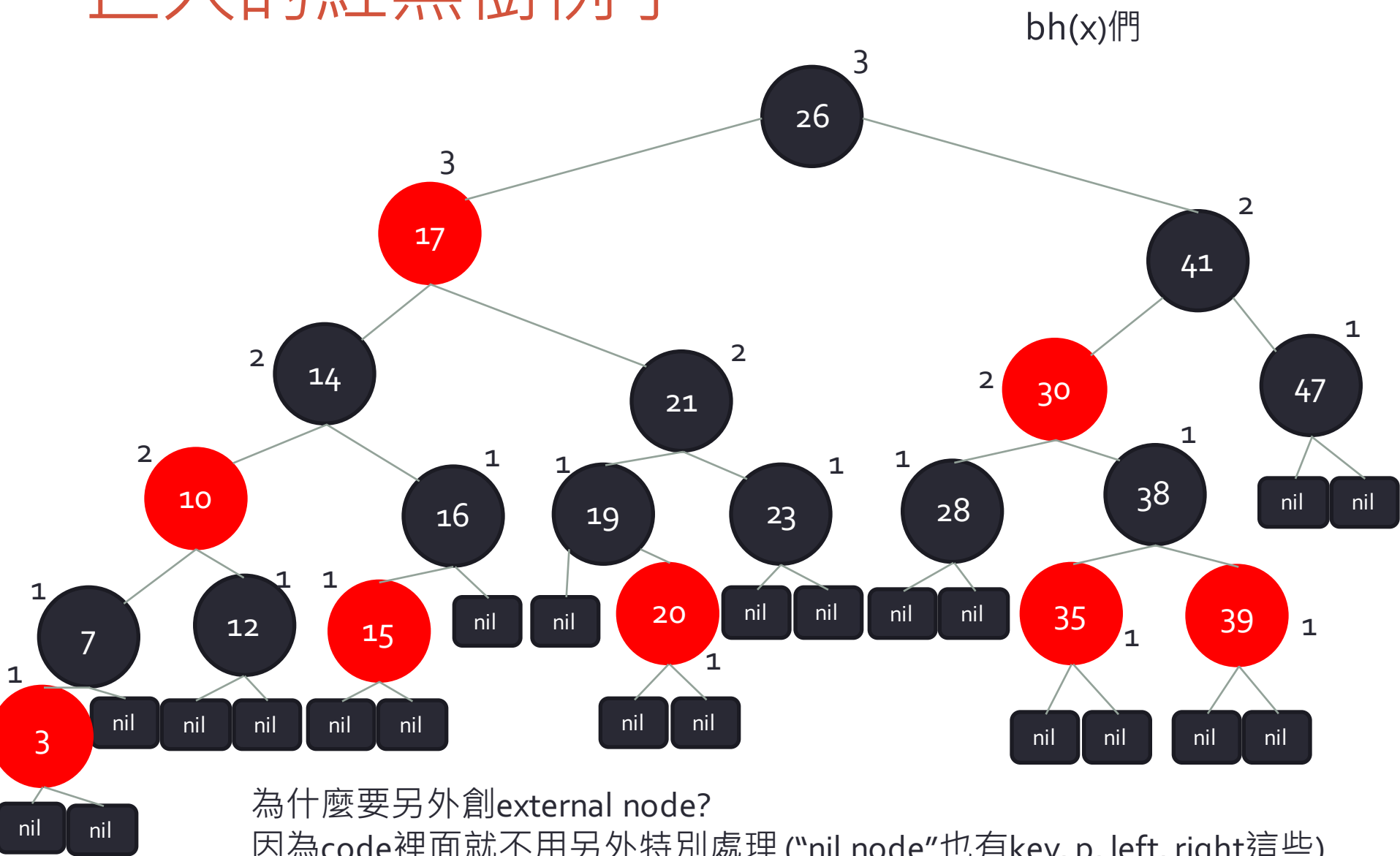
黑高度

- Black height: $bh(x)$ = 從 x 到任何一個它的子孫葉子node遇到的black node個數 (因為都一樣, 所以可以是任何一個)
- 不包含node x 自己 (如果它自己是黑的的話)
- external node或nil(葉子node)的black height為0

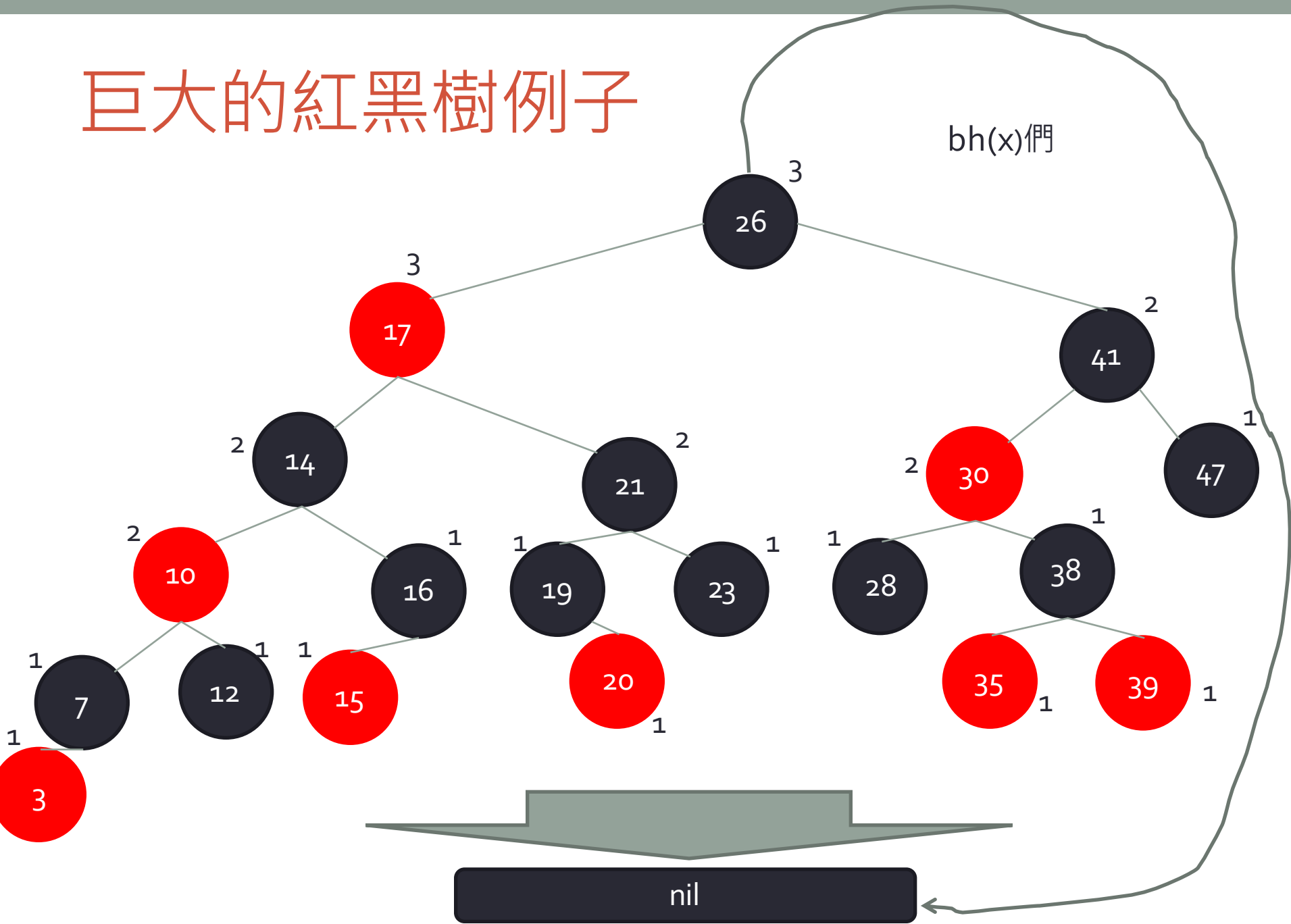
Representation



巨大的紅黑樹例子



巨大的紅黑樹例子



來點證明

- **定理:** 一個有 n 個node的紅黑樹, 最高為 $2 \log(n+1)$
- 第一步驟: 證明node x 底下的subtree最少有 $2^{bh(x)} - 1$ 個 internal node
- 歸納法證明:
 - 1. 當 x 的height為 0 , 則 x 是個葉子. $bh(x)=0$. $2^0 - 1 = 0$. 的確 subtree有 0 個internal node.
 - 2. 假設當 x 的height為正整數, 且是一個有兩個children的 internal node. 每個小孩的black height為 $bh(x)$ (如果小孩是紅的) or $bh(x)-1$ (如果小孩是黑的)
 - 假設小孩的subtree都至少有 $2^{bh(x)-1} - 1$ 個internal node
 - 3. 則 x 底下的subtree應該有
- $(2^{bh(x)-1} - 1) + (2^{bh(x)-1} - 1) + 1 = 2^{bh(x)} - 1$ (成功了!)

來點證明

- “4. 如果一個node是紅的, 則它的children都是黑的”
- 另外一種解釋:
- 從任一node到leaf, 至少一半以上的node是黑的
- 假設 h 是tree的高度, 則 $bh(\text{root}) \geq \frac{h}{2}$
- “node x 底下的subtree最少有 $2^{bh(x)} - 1$ 個internal node”
- 第二步驟: root底下至少有多少個node?
- root底下最少有
- $2^{bh(x)} - 1 \geq 2^{\frac{h}{2}} - 1$ 個node.
- 假設node個數為 n , 則 $n \geq 2^{\frac{h}{2}} - 1$
- $\rightarrow h \leq 2 \log(n + 1)$. 耶.

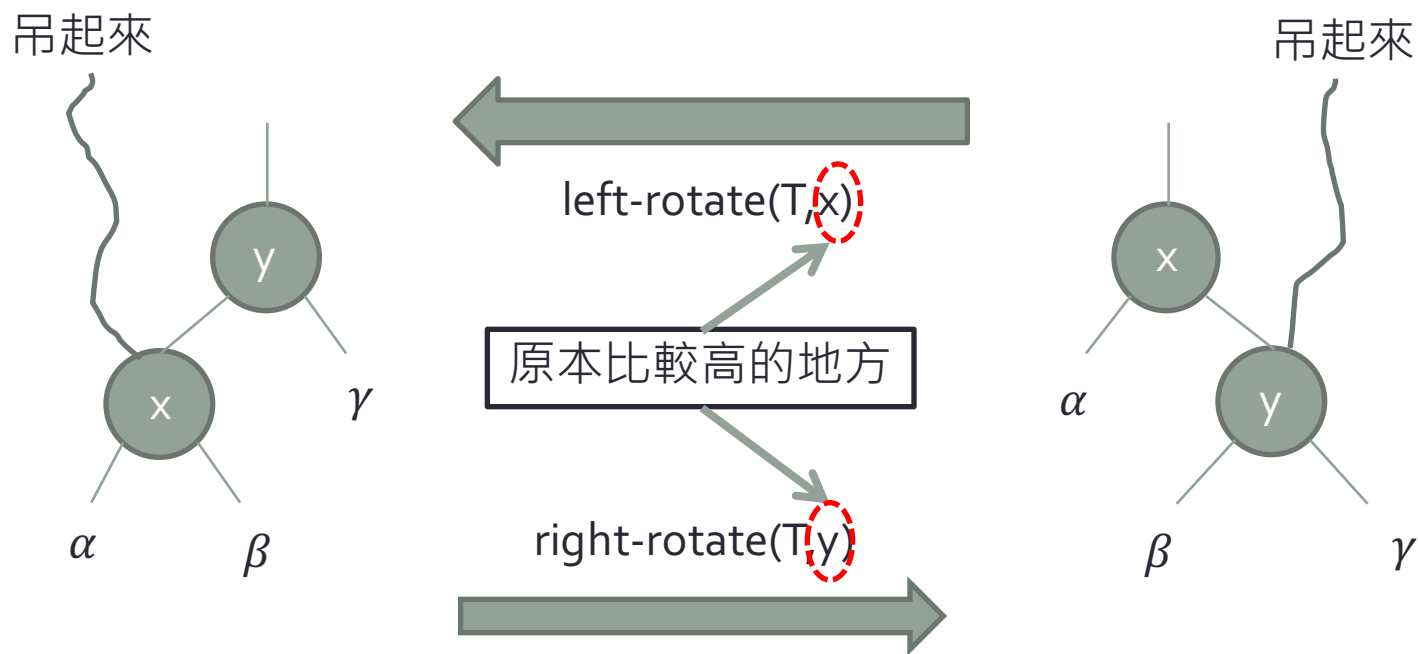
以上證明...

- 說明為什麼
- 1. 找
- 4. 找最大or找最小element
- 5. 找某一個element的下一個(successor)或前一個element (predecessor)
- 等operation可以在 $O(\log n)$ 內完成

- 那麼insert和delete呢?
- 插入和刪除本身所花時間滿足 $O(\log n)$
- 但是: 插入或殺掉之後, 可能不滿足紅黑樹的條件
- 要花多少時間調整呢? 是否還是 $O(\log n)$?

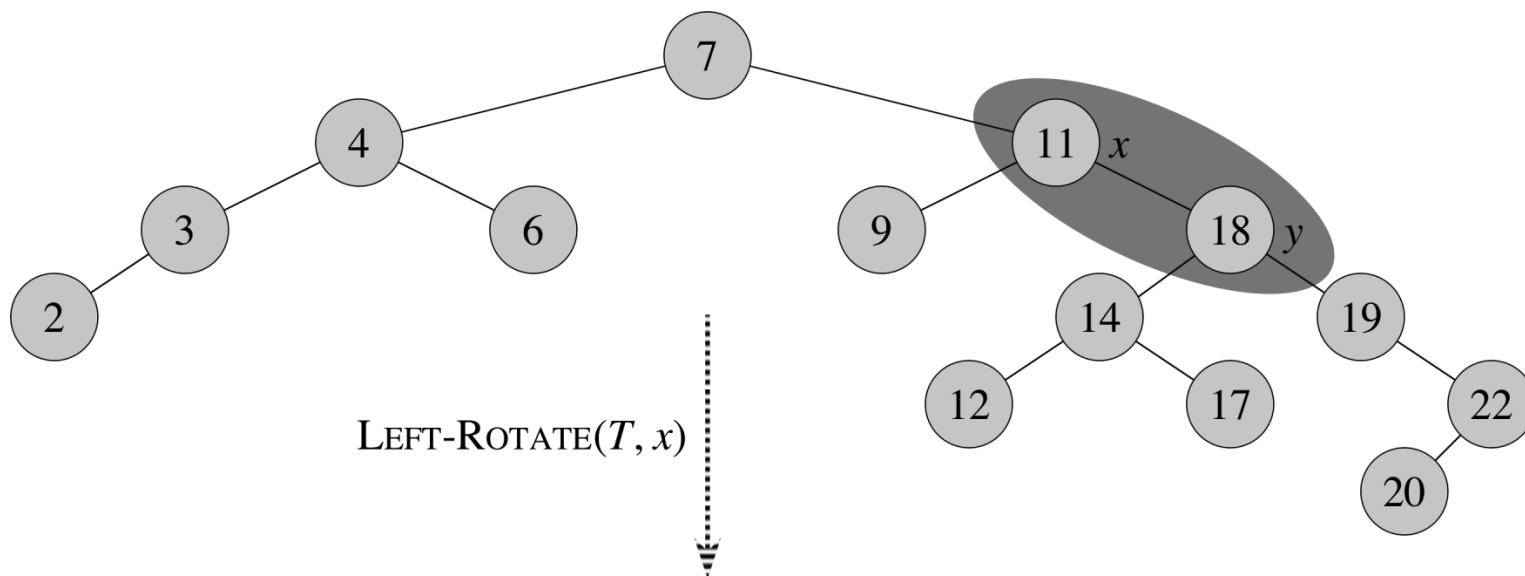
Rotate

- 等一下會用到的



- 注意rotate前後大小關係沒有變喔!
- $\alpha < x < \beta < y < \gamma$

來個例子：Left-Rotate(T, x)



???????

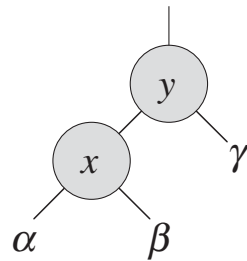
Pseudo-code: Left-Rotate(T, x)

LEFT-ROTATE(T, x)

```

1   $y = x.right$ 
2   $x.right = y.left$ 
3  if  $y.left \neq T.nil$ 
4       $y.left.p = x$ 
5   $y.p = x.p$ 
6  if  $x.p == T.nil$ 
7       $T.root = y$ 
8  elseif  $x == x.p.left$ 
9       $x.p.left = y$ 
10 else  $x.p.right = y$ 
11  $y.left = x$ 
12  $x.p = y$ 

```

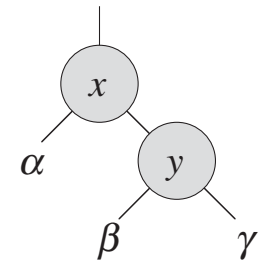


LEFT-ROTATE(T, x)

←.....

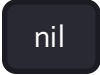
.....→

RIGHT-ROTATE(T, y)

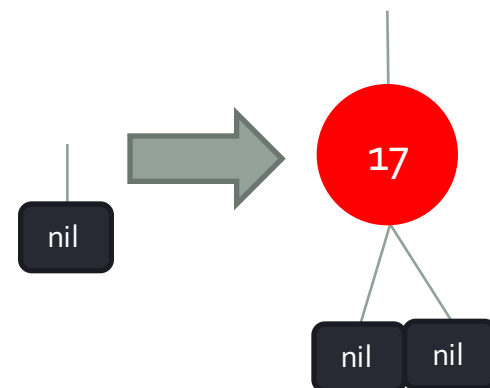


Can you write the pseudo-code for Right-Rotate(T, y)?

Insertion

- 首先, 用原本的binary search tree插入的方法
- insert(z)
- 不同的地方:
 - 1. z的兩個children (pointer)都指到nil node 
 - 2. z為紅色
 - 3. 我們最後要處理不符合紅黑樹規則的部分
- 怎麼處理?

會違反那些規則呢?

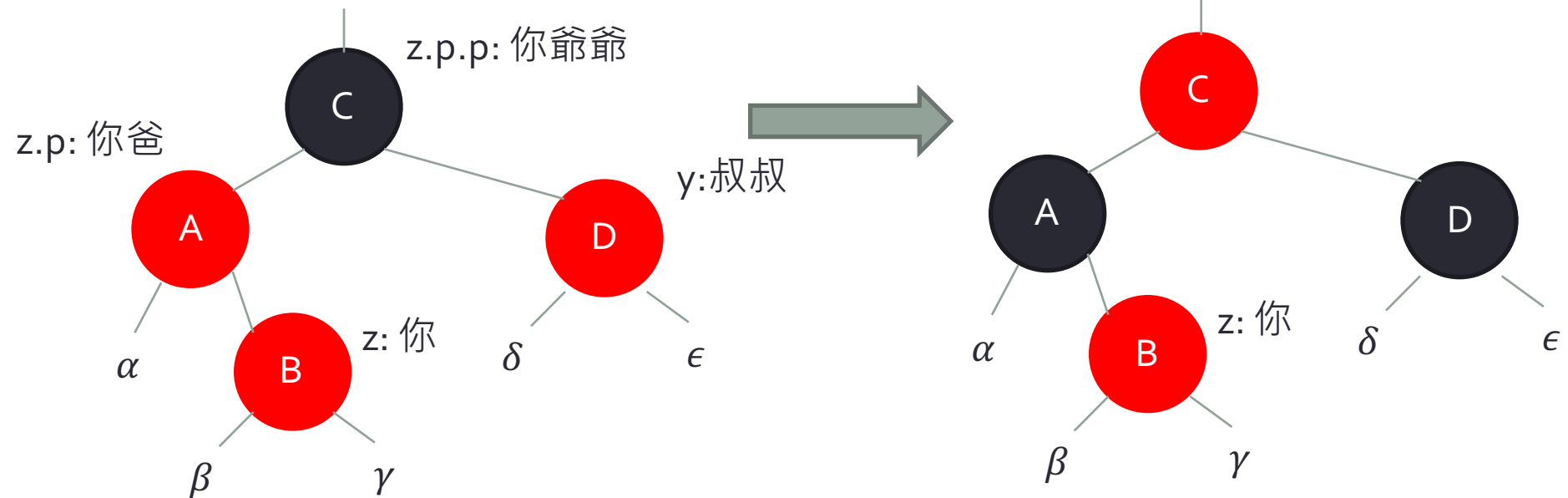


- 規則們:
- ~~1. 每個node不是黑就是紅~~
- 2. root是黑色的
- ~~3. 每個leaf (external node, or nil)都是黑色~~
- 4. 如果一個node是紅的, 則它的children都是黑的
- ~~5. 對每個node來說, 從它到他的所有子孫葉子node的路徑上含有一樣數目的黑色node~~
- 5. 不會違反因為z是紅的, z取代掉一個nil, 而z的兩個children都是nil
- 如果違反2, 則z是root, 整棵樹只有z: 很容易處理
- 來看違反4的情形: z.p is also red

情形一：你的叔叔是紅的

如果你是你爸右邊的小孩

繼續看新z爸爸是不是紅的

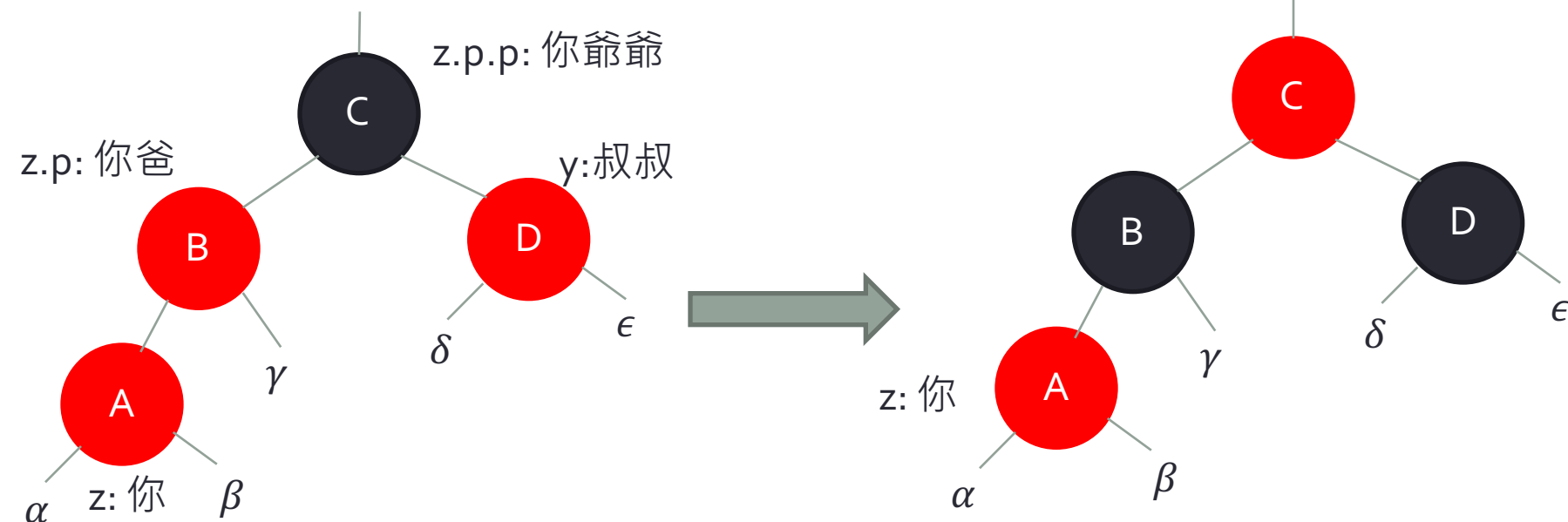


注意看每一個步驟是否有保持紅黑樹第五個條件：
從C開始走到 $\alpha \sim \epsilon$ 任一個分支所經過的黑色node數目在修改前後必須相同!

情形一：你的叔叔是紅的

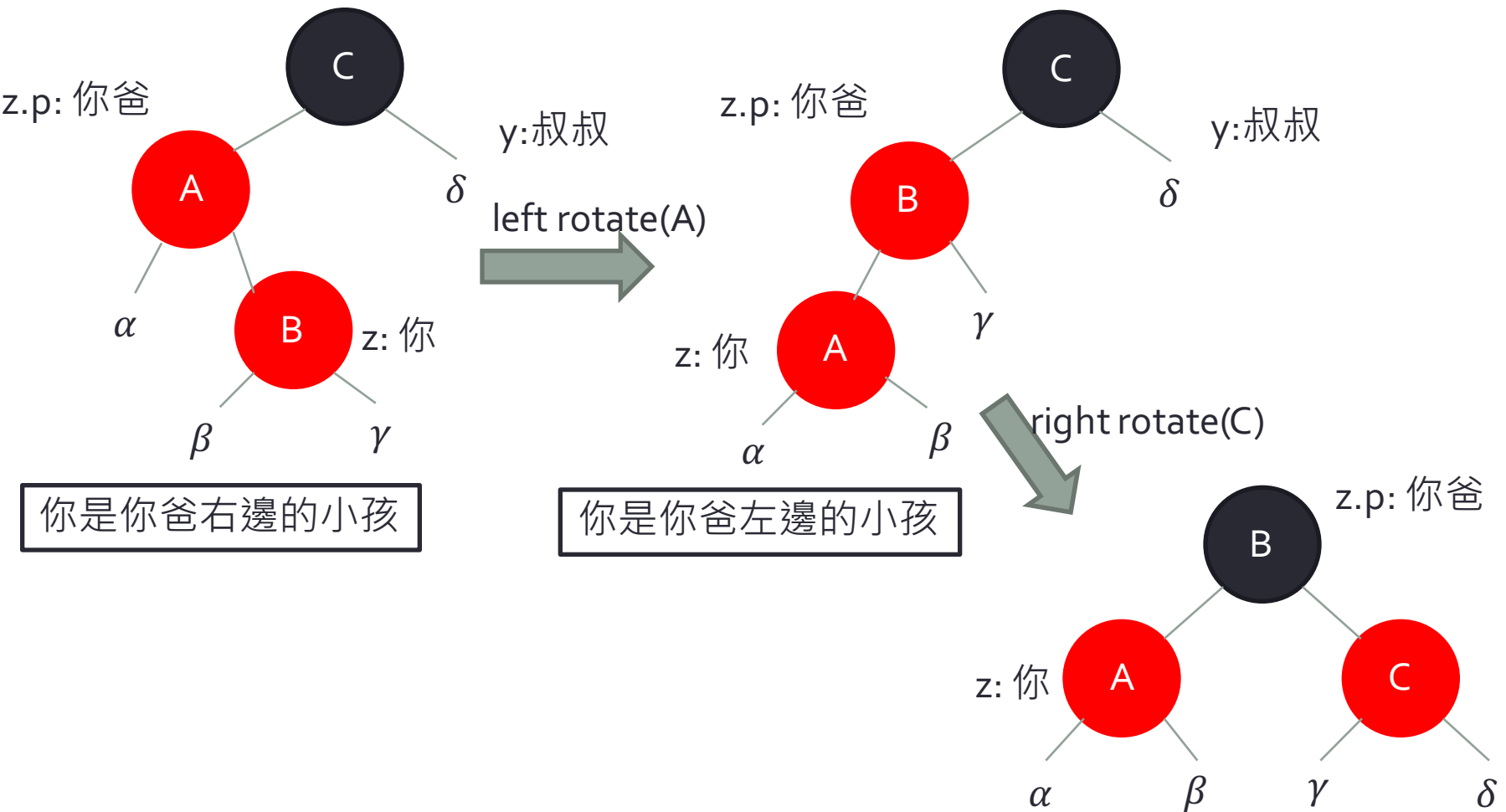
如果你是你爸左邊的小孩

繼續看新z爸爸是不是紅的



注意看每一個步驟是否有保持紅黑樹第五個條件：
從C開始走到 $\alpha \sim \epsilon$ 任一個分支所經過的黑色node數目在修改前後必須相同!

情形二與三：你的叔叔是黑的



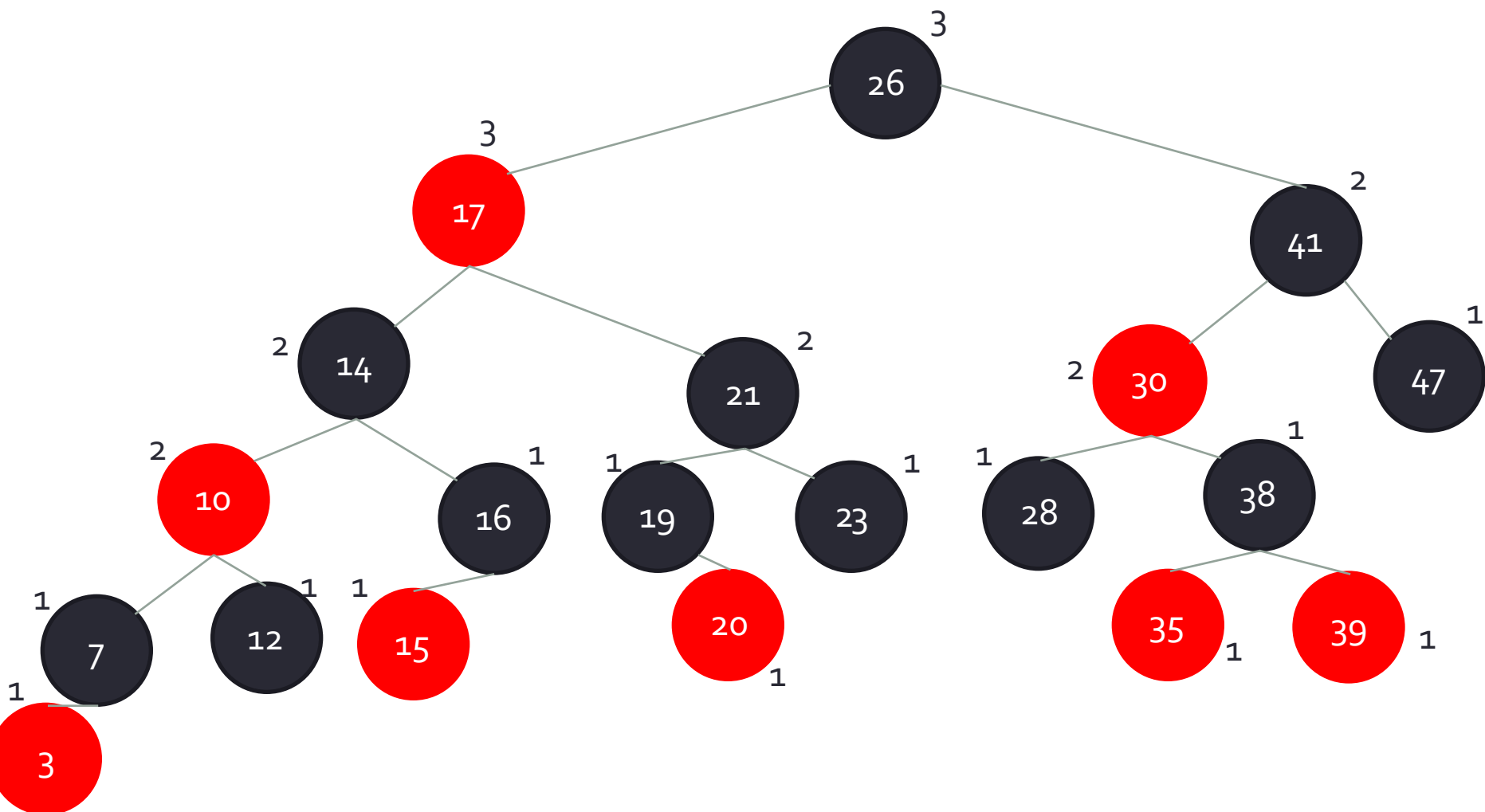
你是你爸右邊的小孩

你是你爸左邊的小孩

注意看每一個步驟是否有保持紅黑樹第五個條件

需要繼續往上層看嗎? 不用! 因為B還是黑的!

練習時間



1. 加入4?

2. 加入40?

Pseudo-code: 插入後修理R-B tree

RB-Insert-Fixup(T, z)

While z.p.color==RED (如果你爸是紅色的)

if z.p==z.p.p.left (如果你爸是你爺爺左邊的小孩)

y=z.p.p.right (那麼叔叔就是你爺爺右邊的小孩)

if y.color==RED (如果叔叔是紅色的)

z.p.color=BLACK (就把爸爸設成黑色的)

y.color=BLACK (叔叔也設成黑色的)

z.p.p.color=RED (爺爺設成紅色的)

z=z.p.p (把自己變成爺爺)

else if z==z.p.right (如果你是爸爸右邊的小孩)

z=z.p (把自己變成你爸)

LEFT-ROTATE(T, z)

z.p.color=BLACK (把你爸變成黑色)

z.p.p.color=RED (把你爺爺變成紅色)

RIGHT-ROTATE(T, z.p.p)

else if z.p==z.p.p.right (如果你爸是你爺爺右邊的小孩，
跟前面一樣，只是left, right都反
過來)

情形1

情形2

情形3

情形4-6: 鏡射的狀況

T.root.color=BLACK (最後把root改成黑色)

要花多少時間呢?

- 原本正常的binary tree insert要花 $O(\log n)$ 的時間
- 因為高度最高為 $2 \log(n+1)$
- 那麼花費在調整的時間呢?

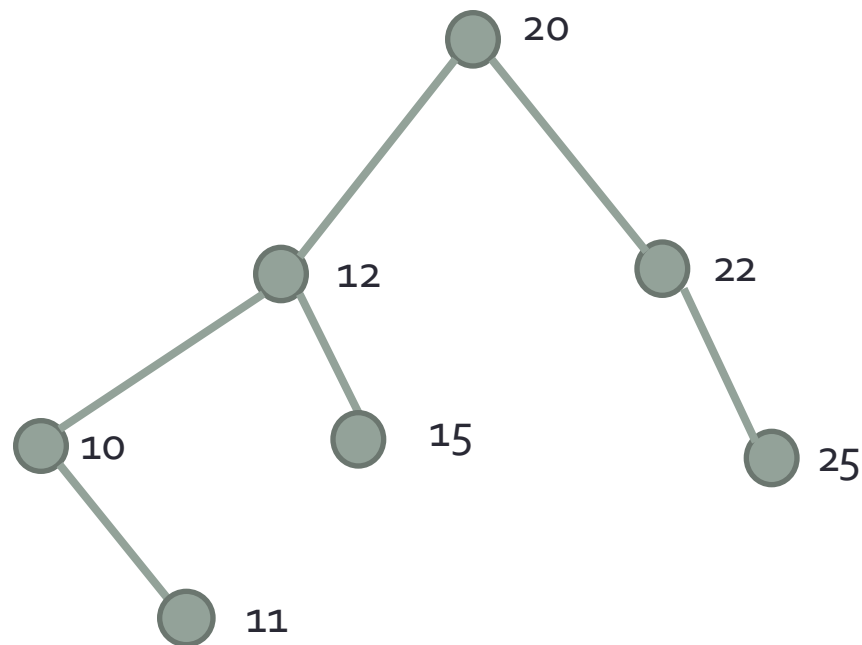
- 最糟的狀況? 情形一—一直重複發生, 每次z往上移兩層
- 執行時間最糟要花跟高度成正比的時間
- 也是 $O(\log n)$

- 那如果發生情形二or三呢?
- 執行一次即完成. $O(1)$. (所以比 $O(\log n)$ 小)
- 另外, 最多rotate只需要執行兩次. (不會再發生第二次情形二or三)

- 正確性證明請見Cormen p. 318-322

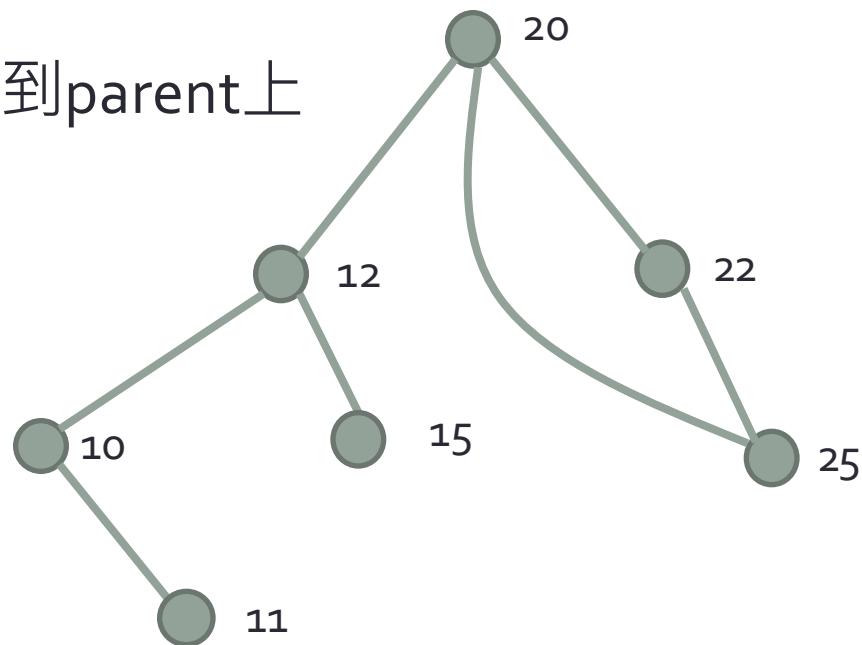
如何刪掉一個node? (binary search tree 複習)

- 首先要先找到那個node
- 接著, 有各種不同情形:
 - 如果沒有手(degree=0)
 - 直接拿掉



如何刪掉一個node? (binary search tree 複習)

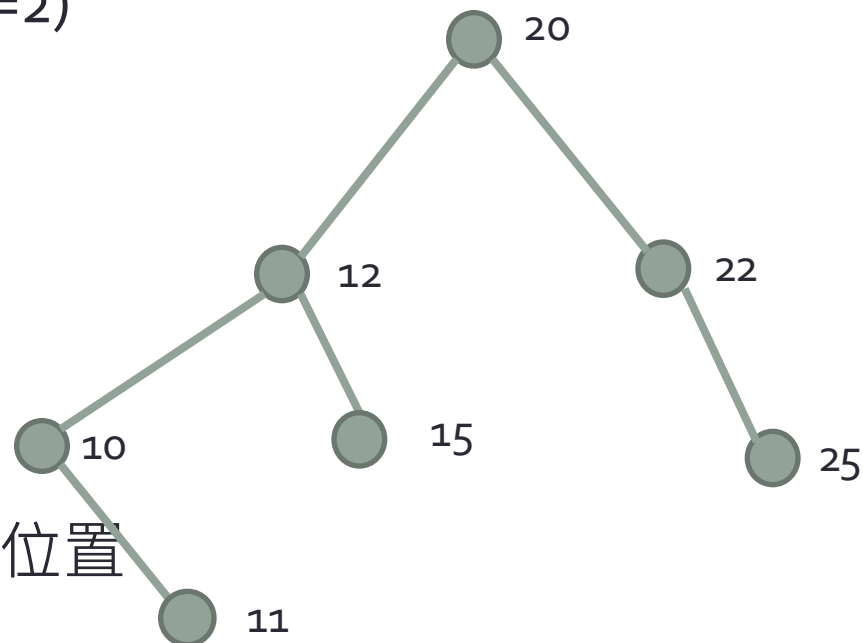
- 如果只有一隻手 (degree=1)
- 則把那個唯一的child拿上來接到parent上
- 例如: 拿掉22



如何刪掉一個node? (binary search tree 複習)

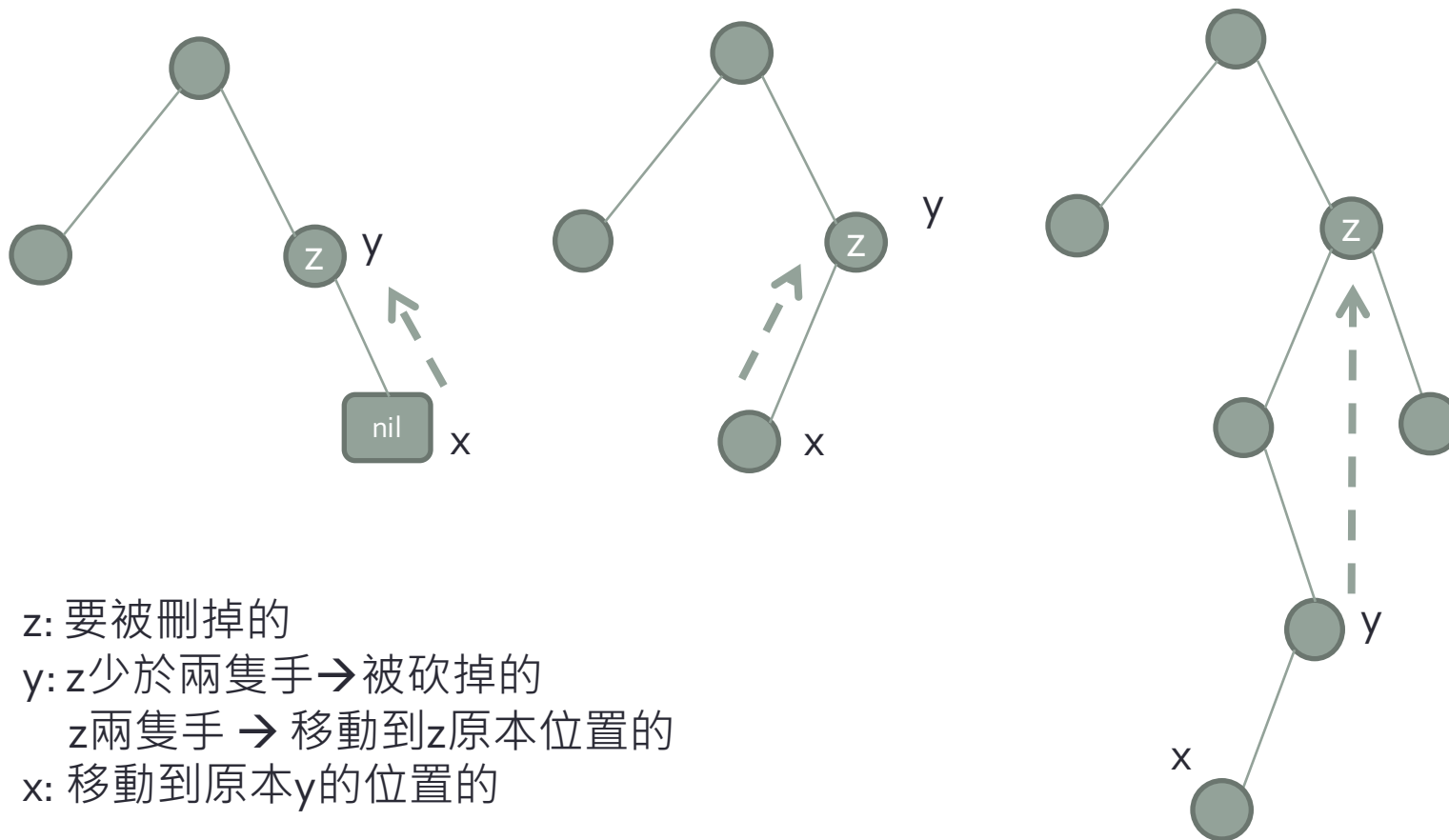
- 如果兩手都有東西呢? (degree=2)

- 例如刪掉12
- 找左邊child底下最大的
- (或者是右邊child底下最小的)



- 刪掉它並把它移到原本刪掉的位置
- 問題: 那如果那個最大的底下還有child呢?
- 直接拿上來(最多只會有左邊一隻手)
- 這時被移上去的node顏色改變成新位置原本node的顏色

x, y, z的定義



z : 要被刪掉的

y : z 少於兩隻手 \rightarrow 被砍掉的

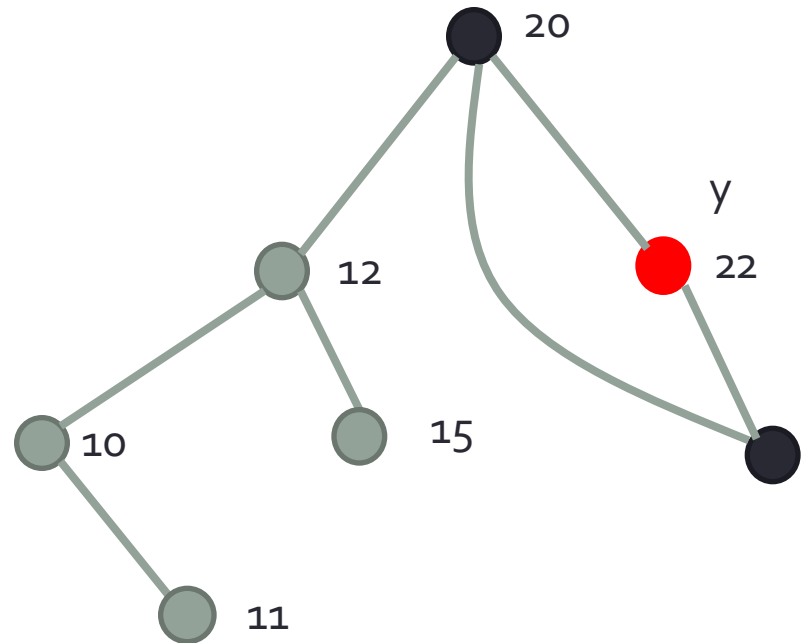
z 兩隻手 \rightarrow 移動到 z 原本位置的

x : 移動到原本 y 的位置的

會記得 y 的顏色.

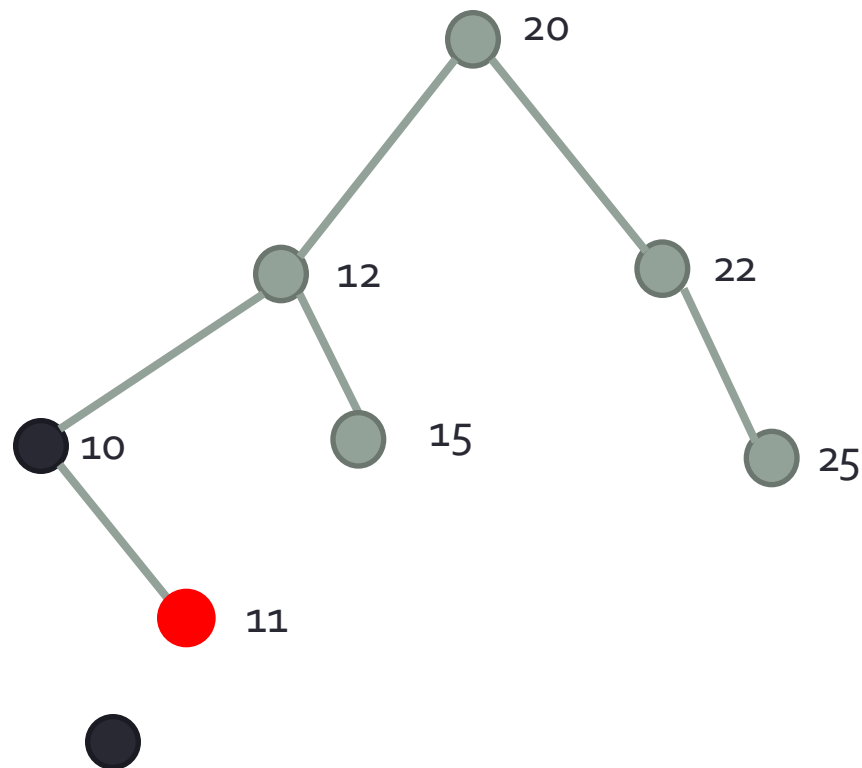
拿掉一個node，什麼時候會違反規則？

- 假設前述三種情形中，
- 移動(兩手都有)或是刪除(一隻手或沒有手)的node為 y
- 當 y 為紅色(原本的颜色), 移動或刪除會造成違反規則嗎？
 1. black height不會改變, 因為 y 是紅色node
 2. 會不會造成兩個紅色node是相鄰的呢? (父子)
 - A. 如果 y 是被刪掉的, 因為它是紅的, 所以它的上下層都是黑的
- 不會有問題



拿掉一個node, 什麼時候會違反規則?

- B. 如果y是被移動的, 假設y有children也是黑色的, 不會造成問題
- 3. y如果是紅色, 它不會是root. 所以也不會有造成違反root是黑色的規定
- 綜合以上三點, 只有當y為黑色時才可能會造成問題, 需要調整



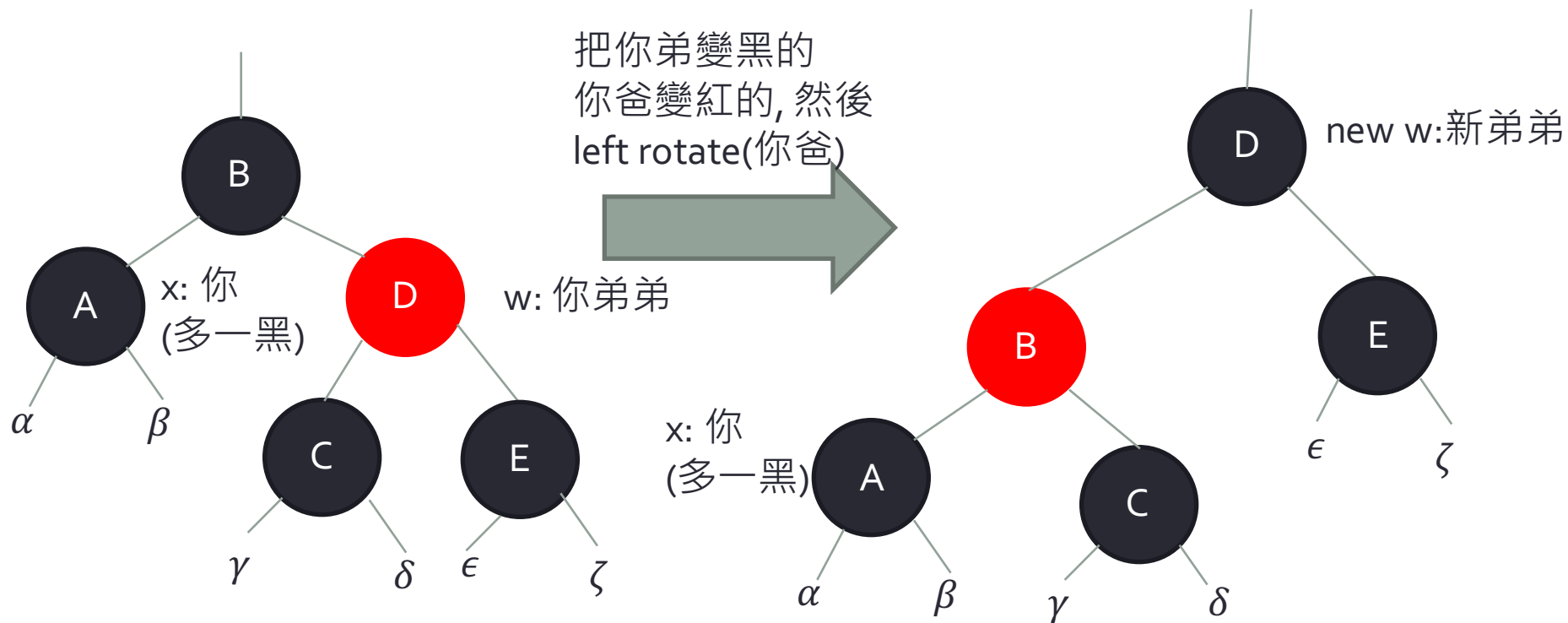
可能違反規則的情形

- 當 y 是黑色的, 可能造成違反規則的有下列情形:
 - 1. y 是root. y 刪掉以後, 它的一個children是紅色的, 變成了root
 - 2. y 原本的上下兩層都是紅色的, 移走或刪除以後變成兩個紅色相鄰
 - 3. y 刪掉或移走以後, 造成 y 的祖先們的black height不一致(因為 y 是黑的)
- y 拿掉以後, y 的黑色就被“趕到” x 裡面了
- x 表示: 這邊要有一份黑色
- 但是 x 本身可能原本是紅或黑色

x是“紅與黑”或“黑與黑”?

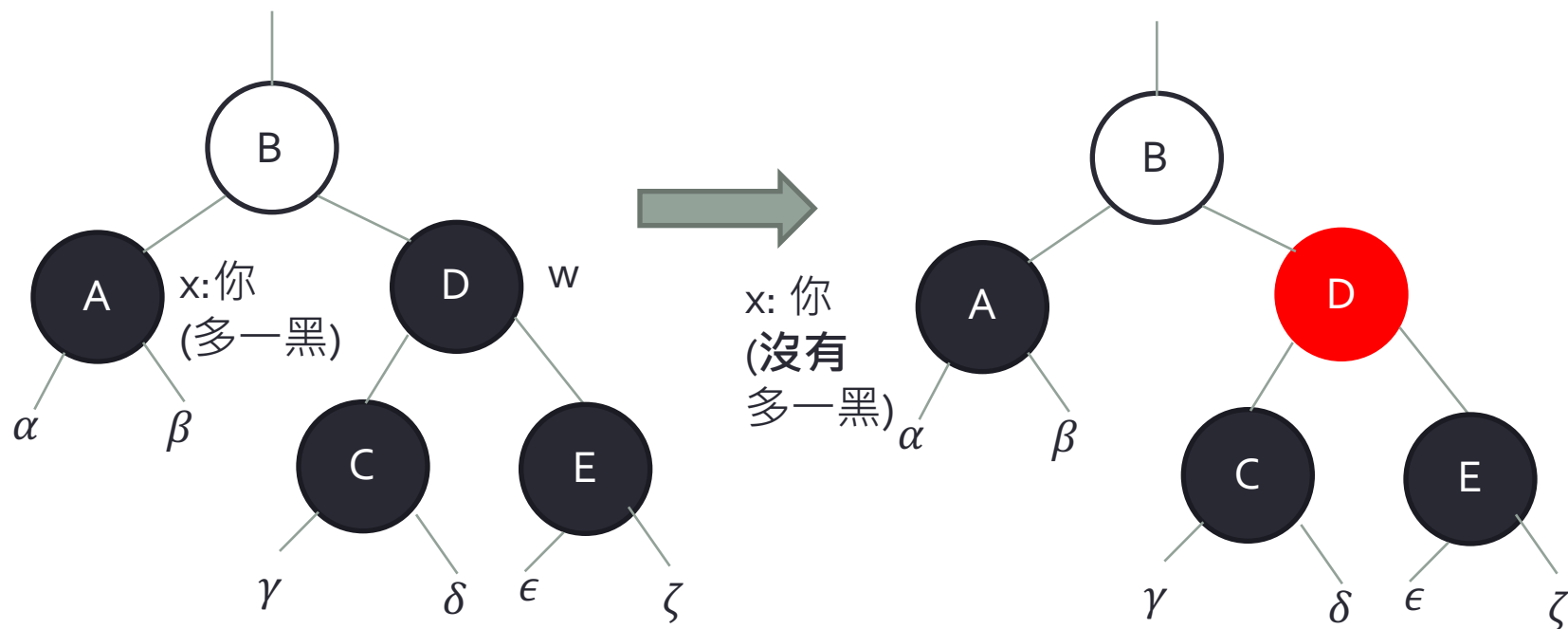
- 1. x如果是“紅與黑”, 我們把它改成黑就可以了.
(這邊要多一份黑色, 所以我就把紅色變成黑色就多一份了)
- 2. x如果是root且為“黑與黑”, 那麼直接就可以改成單純的黑色
(反正已經到root了, 所以就算把一份黑色拿掉也不會有祖先會因此少算一份黑色的node)
- 3. 其他的就用以下的四種case處理...(把黑與黑往root方向移動)

情形一：你的弟弟是紅的

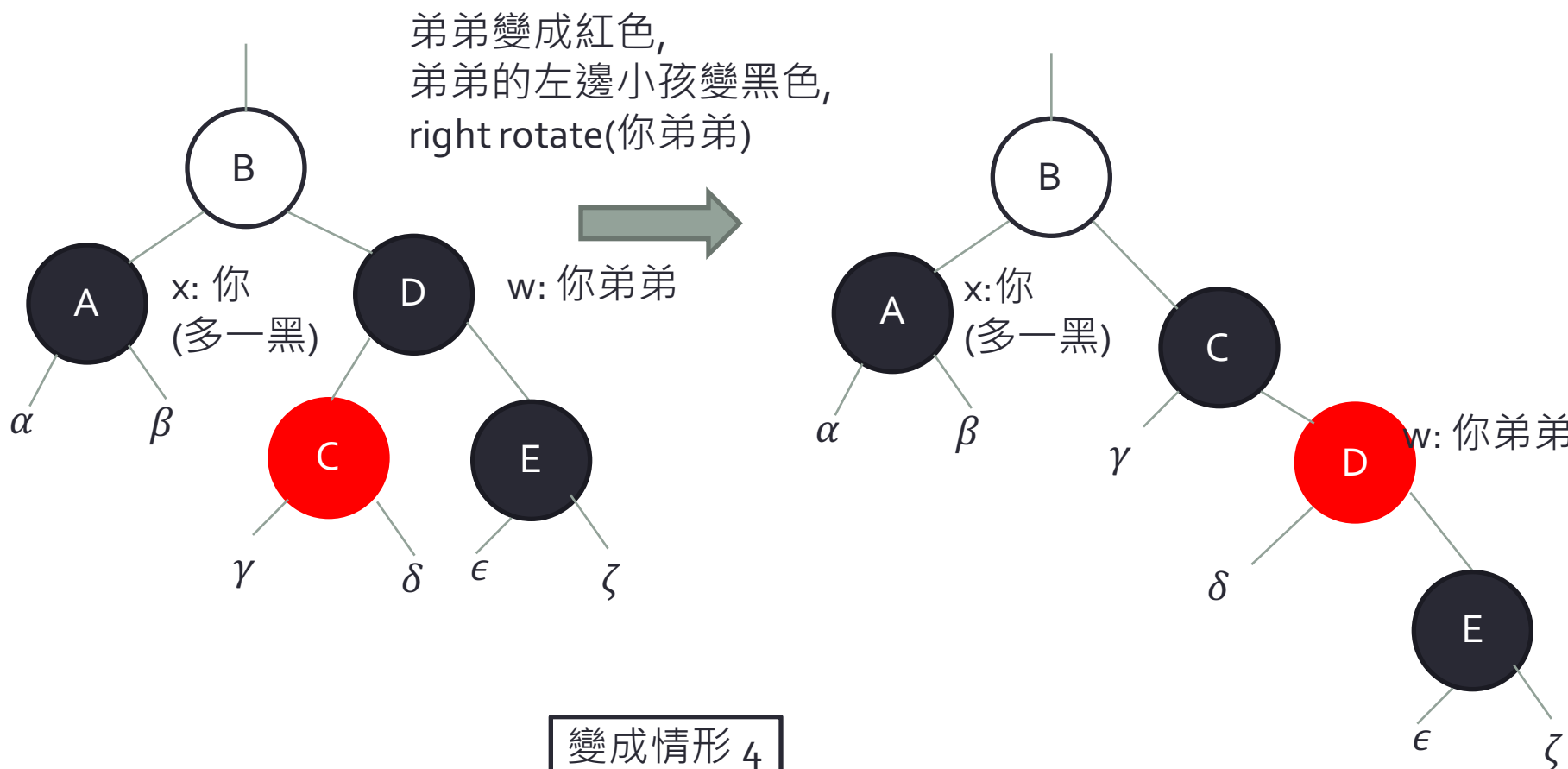


轉換成情形二、三、或四

情形二：你的弟弟是黑的& 你的姪子們都是黑的

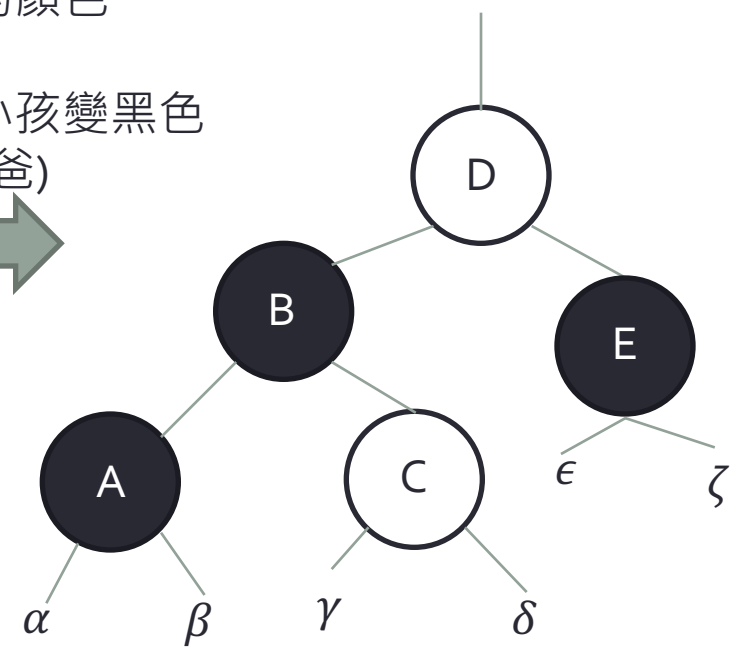
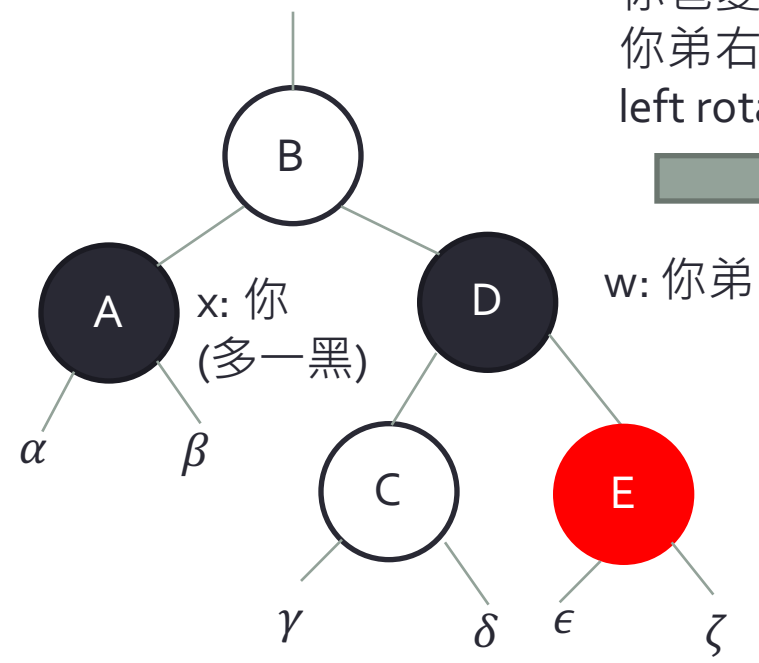


情形三：你的弟弟是黑的& 你的姪子們(弟弟的小孩)是左紅右黑



情形四：你的弟弟是黑的& 你的右邊姪子(弟弟的右邊小孩)是紅的

你弟變你爸的顏色
你爸變黑色
你弟右邊的小孩變黑色
left rotate(你爸)



Pseudo-code: 刪除後修理R-B tree

```

RB-Delete-Fixup(T,x)
while x!=T.root && x.color==BLACK (你不是root而且是黑的)
    if (x==x.p.left) (你是你爸的左邊小孩)
        w=x.p.right (你弟就是你爸右邊小孩)
        if w.color==RED (如果你弟是紅色的)
            w.color=BLACK (把你弟設成黑色)
            x.p.color=RED (你爸設成紅色)
            LEFT-ROTATE(T,x.p)
            w=x.p.right (你新弟弟是現在你爸右邊小孩)
        if w.left.color==BLACK && w.right.color==BLACK (兩個姪子都黑)
            w.color=RED (把弟弟設成紅的)
            x=x.p (你變成你爸)
        else if w.right.color==BLACK (你姪子右黑左紅)
            w.left.color=BLACK (左邊姪子設成黑的)
            w.color=RED (你弟設成紅的)
            RIGHT-ROTATE(T,w)
            w=x.p.right (新弟弟是現在你爸右邊小孩)
            w.color=x.p.color (弟弟設成爸爸的顏色)
            x.p.color=BLACK (爸爸設成黑的)
            w.right.color=BLACK (右邊姪子設成黑的)
            LEFT-ROTATE(T,x.p)
            x=T.root (你直跳root, 準備出去)
    else (x==x.p.right) (如果你是你爸右邊的小孩, 跟前面一樣, 只是left, right都反過來)

```

情形1

情形2

情形3

情形4

情形5-8

x.color=BLACK (如果跳出迴圈了, 也就是x是紅加黑, 或者是root是黑加黑, 那麼就把它設成一個黑色即可)

Delete後調整要花多少時間?

- 解決路徑圖:
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow \text{solved}$ (從1到2的, 情形二中的圖中B原本一定是紅色, 所以可以直接解決)
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \text{solved}$
- $1 \rightarrow 4 \rightarrow \text{solved}$
- $3 \rightarrow 4 \text{ solved}$
- 4 solved
- $2 \rightarrow \text{解決}$ (如果圖中B原本是紅色), or 轉到1 or 2 or 3 or 4 (x往上走一層) (如果圖中B原本是黑色)

- 所以worst case為2,2,2,...一直到root為止
- $O(\log n)$

Today's Reading Assignment

- Cormen ch.13
- You might be interested in some other balanced binary trees:
 - AVL Tree (Cormen problem 13-3)
 - 2-3 Trees
 - B-trees, generalization of 2-3 trees (Cormen ch. 18)