Divide and Conquer III

Michael Tsai

2013/9/26

Closest Pair of Points

- 問題: 在$n \geq 2$個點中(集合Q), 找出一對點其兩點之間的距離為最小. 每個點為一二維座標.
- 距離: 以Euclidean distance定義.
- $p_1 = (x_1, y_1)\ p_2 = (x_2, y_2)$
- $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- Q中可能有一樣的兩點 (則其距離為0)
- Reference: (Textbook 33.4, p.1039)

Closest Pair of Points - 暴力法

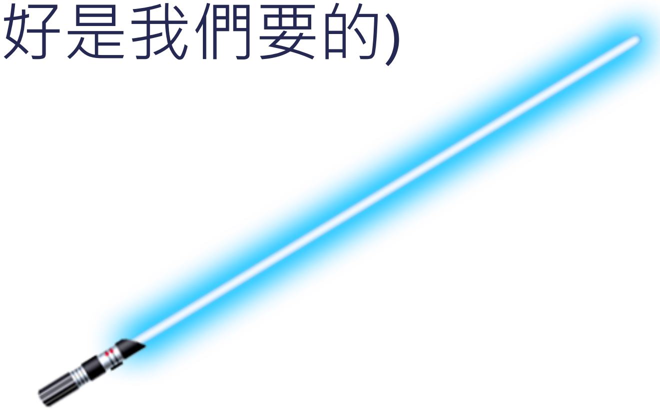
- 算出每一對的距離
- $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$

Closest Pair of Points – D&C

- 思考流程:
- 原本是$\Theta(n^2)$, $\Theta(n\log n)$似乎是個不錯的目標
- 大刀先拿來砍一砍.
- 大概會長這樣: $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(??)$
- 可以對Q中的點排序嗎?
  - 選擇一: 開始的時候先全部排一次
  - 花$\Theta(n\log n)$, 跟目標一樣...**ok的!**
  - 選擇二: 每一次遞迴呼叫都對點排序
  - 那遞迴式至少變成: $T(n)=2T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(n\log n)$
  - $T(n)=\Theta(n\log^2 n)$
    (使用課本4.6-2 變形master theorem)　**not ok!**

Closest Pair of Points – D&C

- $\mathrm{T}(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$的話...
- $T(n) = \Theta(n \log n)$ (正好是我們要的)



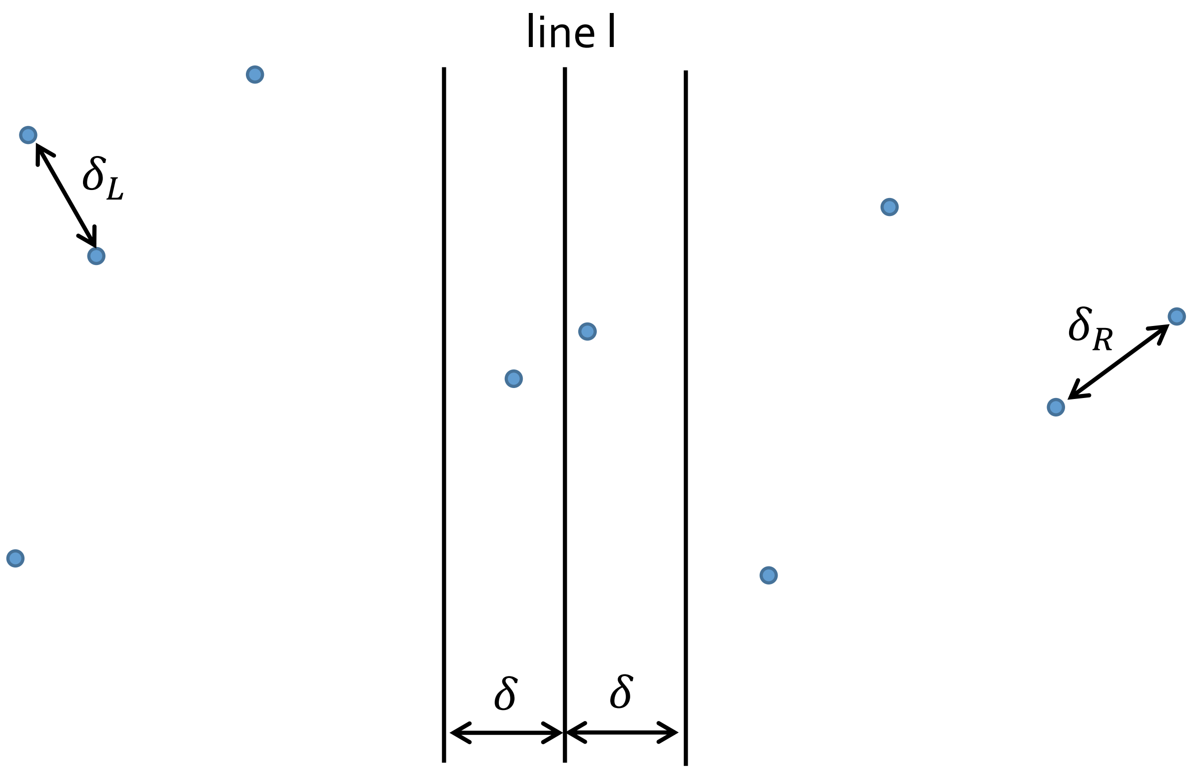
- Algorithm組成元素:
  - 一開始可以對點先排序
  - 光劍一隻:
  - Divide的時候切成兩份等份
  - Combine的時候最多可以花$\Theta(n)$的時間

Closest Pair of Points – D&C

- 先想想Recursive case
- Divide:
  - 劃一條直線l, 把所有的點分成兩部分P_L及P_R, 使$|P_L| = \left\lceil \frac{|P|}{2} \right\rceil$ and $|P_R| = \left\lfloor \frac{|P|}{2} \right\rfloor$, P_L中的點都在l上或它的左邊, P_R的點都在l上或它的右邊
- 遞迴呼叫會解決找出P_L及P_R中的closest pairs, 假設找到的最短距離分別為δ_L, δ_R, and $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$
- Combine:
  - Closest Pair有三種可能:
    - P_L或P_R中找到的
    - 或者是一個點在P_L中, 一個點在P_R中的, 而兩點距離小於δ

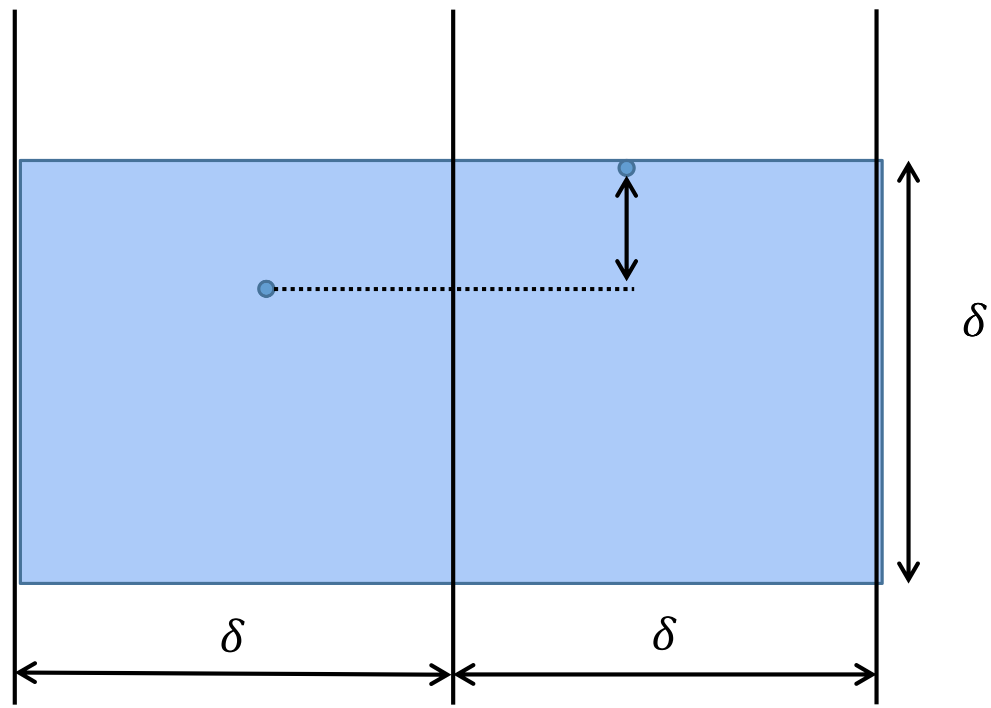
Closest Pair of Points – D&C

- 怎麼找出一點在P_L, 一點在P_R, 而兩點距離$< \delta$?
- 只考慮可能的點: 在2δ範圍內的點



Closest Pair of Points – D&C

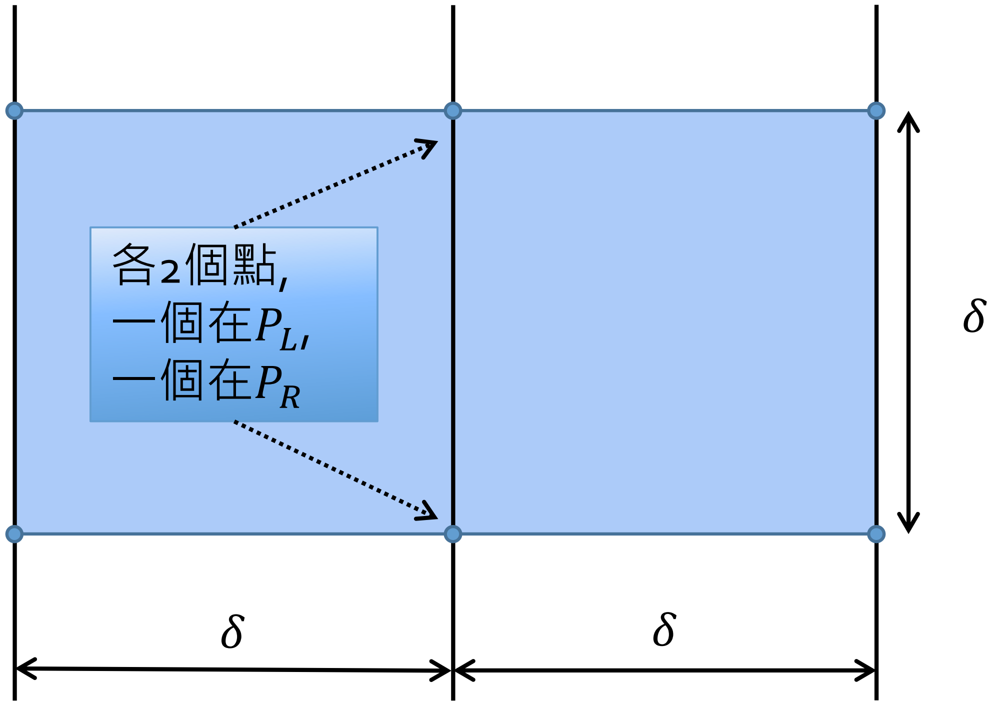
- 可是combine只能花$\Theta(n)$喔 (不能暴力找每個pair)
- 關鍵: 2δ長條範圍內不需要找每個pair!
  1. 構成closest pair的兩點一定在$2\delta \times \delta$的長方形內



Closest Pair of Points – D&C

2. $2\delta \times \delta$的長方形內最多可以放下8個點 (點和點之間的距離不可以小於δ, 否則就矛盾了)

- 因此對每個在2δ長條中的點, 如果照Y排序過後, 只需要檢查它和它後面七個點的距離!
- $\Theta(n)$



Closest Pair of Points – D&C

- Base case:
- 當$n \leq 3$時, 則直接用暴力法找出closest pair
- 最多算三次距離.
- $\Theta(1)$

Closest Pair of Points – D&C

- Divide:

$\Theta(n)$

  - 劃一條直線l, 把所有的點分成兩部分P_L及P_R, 使$|P_L| = \left\lceil\frac{|P|}{2}\right\rceil$ and $|P_R| = \left\lfloor\frac{|P|}{2}\right\rfloor$, P_L中的點都在l的左邊, P_R的點都在l上或它的右邊
- 遞迴呼叫會解決找出P_L及P_R中的closest pairs, 假設找到的最短距離分別為δ_L, δ_R, and $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$

$2T(\frac{n}{2})$

- Combine:
  - 將在P_L及P_R中不在直線l的左右δ距離內的點去除, 得到P_L'及P_R'.
  - 對於P_L及P_R中的點, 檢查它和Y座標在它後面的七個點的距離是否小於δ.

$\Theta(n)$

  - 若是的話則此為closest pair. 若否的話則遞迴呼叫所得到的δ距離的pair為closest pair.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

讚

Closest Pair of Points – D&C

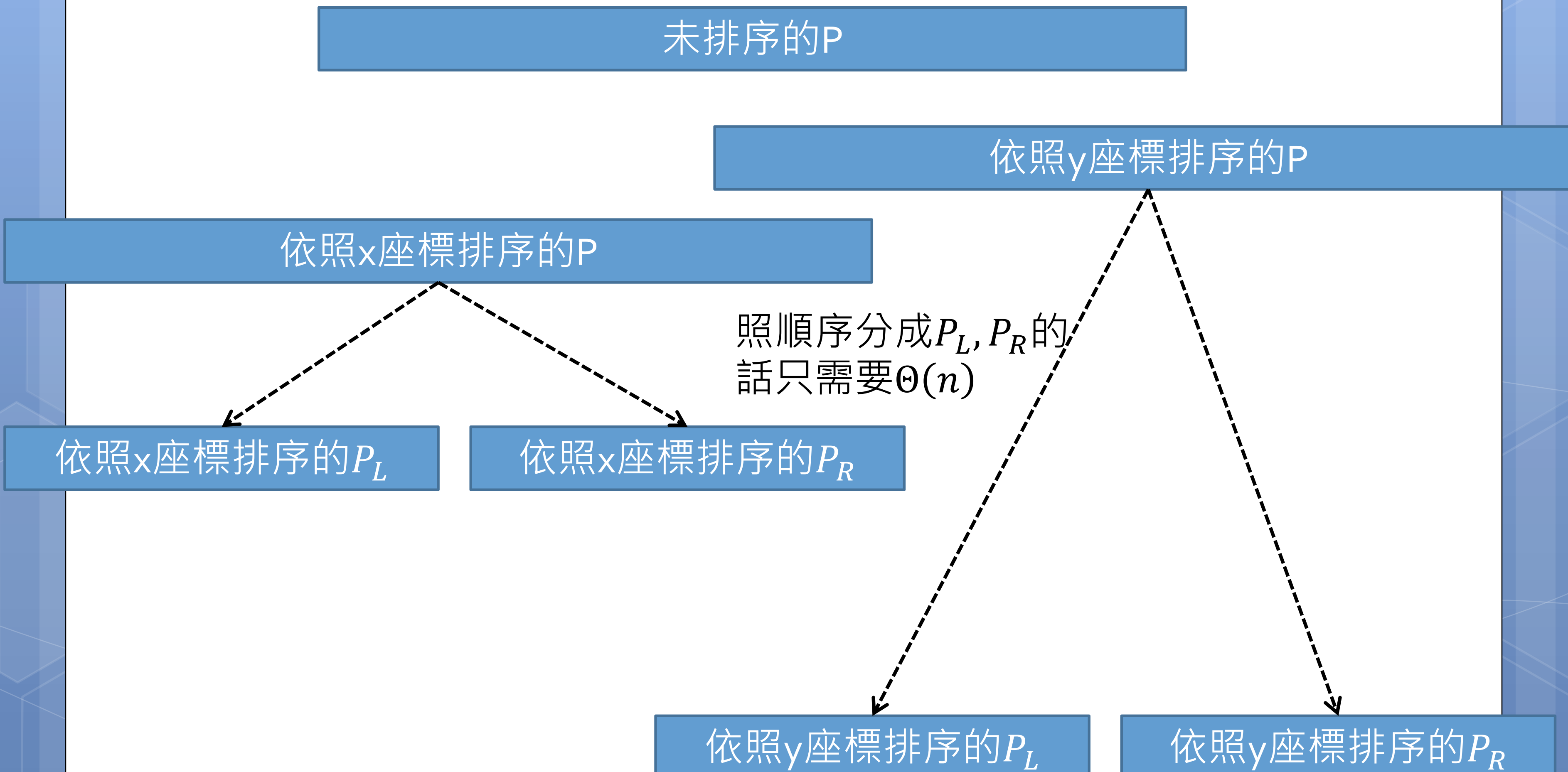
- Divide:
  - 劃一條直線l, 把所有的點分成兩部分P_L及P_R, 使$|P_L| = \left\lceil\frac{|P|}{2}\right\rceil$ and $|P_R| = \left\lfloor\frac{|P|}{2}\right\rfloor$, P_L中的點都在l的左邊, P_R的點都在l上或它的右邊
- 遞迴呼叫會解決找出P_L及P_R 的最短距離分別為δ_L, δ_R, and $\delta = \min(\delta_L, \delta_R)$
- Combine:
  - 將在P_L及P_R中不在直線l的左 P_R'.
  - 對於P_L及P_R中的點, 檢查它和Y座標在它後面的七個點的距離是否小於δ.
  - 若是的話則此為closest pair, 若否的話則遞迴呼叫所得到的δ距離的pair為

需要所有P中的點照x座標排序

需要所有P中的點照y座標排序

但是不能每個遞迴呼叫都排序!
如何用低於$\Theta(n \log n)$的時間取得排好序的點?

Closest Pair of Points – D&C



Closest Pair of Points – D&C

- 不包含一開始的sorting的話:
- $T(n) = \Theta(n \log n)$
- 包含所有的話:
- $T'(n) = \Theta(n \log n) + T(n) = \Theta(n \log n)$

Sorting所花時間

休息一下-程式設計師常見藉口

- by Santos Liu on Saturday, March 5, 2011 at 1:00am
  第 20 名：這很奇怪喔。
  第 19 名：以前從來不會這樣啊！
  第 18 名：昨天明明會動的啊！
  第 17 名：怎麼可能~
  第 16 名：這一定是機器的問題。
  第 15 名：你到底是打了什麼才讓程式當掉的？
  第 14 名：一定是你的資料有問題。
  第 13 名：我已經好幾個禮拜沒碰那一段程式了。
  第 12 名：你一定是用到舊版了。
  第 11 名：一定是巧合！為什麼這種壞運氣只讓你碰上。
  第 10 名：我不可能什麼功能都測試到吧，有 bug 是正常的！
  第 9 名：這個不可能是那個的原始碼！
  第 8 名：這程式應該是會動的，只是我寫好後還沒做測試。
  第 7 名：可惡！一定有人改了我的程式。
  第 6 名：你有檢查過你的電腦有沒有病毒嗎？
  第 5 名：儘管這功能還不能動啦，你覺得他如何？
  第 4 名：在你的系統不能用那一個版本的程式啦！

  第 3 名：你幹嘛要那樣操作，都是你的問題。
  第 2 名：程式發生問題時你在哪裡？
  第 1 名：在我的機器明明就可以動啊！