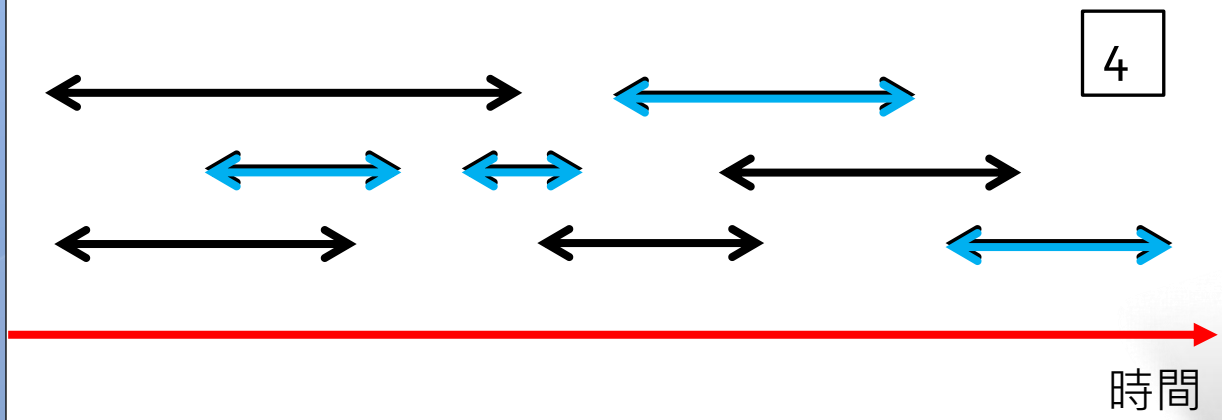
Greedy Algorithms

Michael Tsai

2012/10/18

超級電腦排程問題



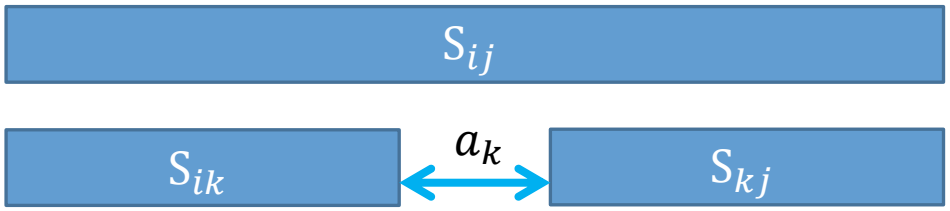
- 需要交給超級電腦的工作若干
- 每樣工作有選定的開始與結束時間
- 如何選出一組可以執行的工作(執行時間不重疊), 使這些工作的數量最大?

問題定義

- 集合$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- 每一個工作a_i有開始時間s_i及結束時間f_i
- $0 \leq s_i < f_i < \infty$
- 每個工作執行時間為$[s_i, f_i)$
- 可以選兩個工作, 其中一個工作的結束時間和另外一個工作的開始時間一樣
- 當$s_i \geq f_j$或$s_j \geq f_i$時a_i和a_j可以被同時選入
- 工作已經照結束時間排好了:
- $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots \leq f_{n-1} \leq f_n$

先請出神聖的dynamic programming 尚方寶劍

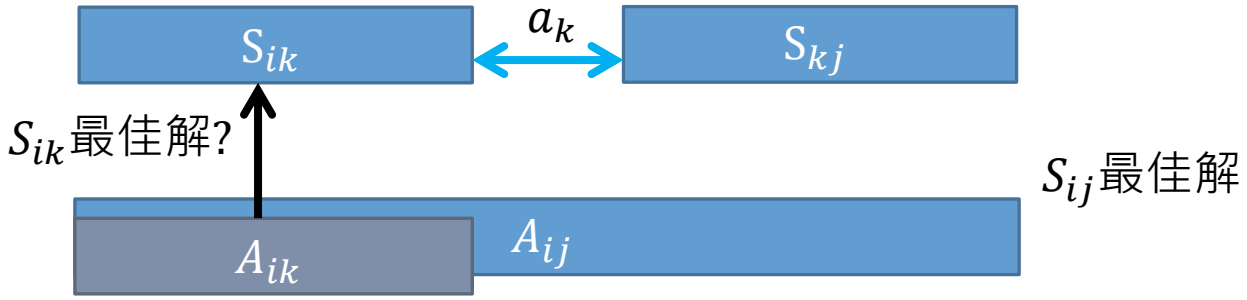
- 定義子問題:
  S_{ij}為a_i完成後,a_j開始前的所有工作集合
- 要找出S_{ij}中的最大可執行集合, 假設其中包含a_k



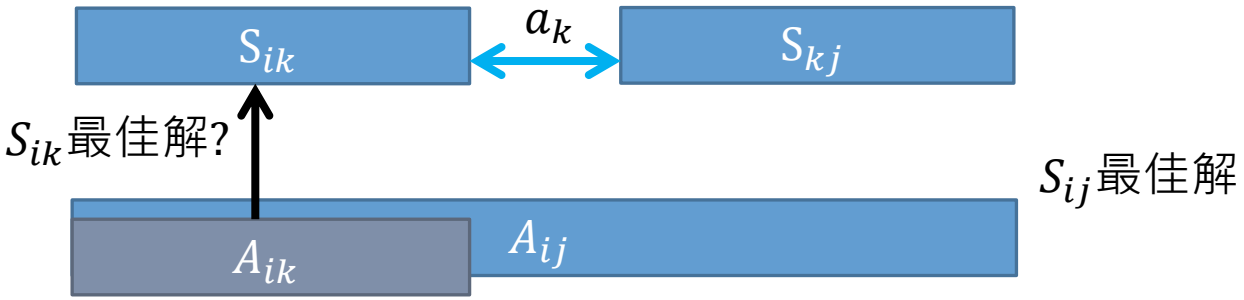
- 所以假設A_{ij}為S_{ij}的最佳解, 則$|A_{ij}| = |A_{ik}| + |A_{kj}| + 1$

Dynamic programming 尚方寶劍

- Optimal Substructure:
- 證明A_{ij}中包含S_{ik}與S_{kj}的最佳解(即欲證明A_{ik}為S_{ik}之最佳解, 或A_{kj}為S_{kj}之最佳解)



Optimal Substructure



- 假設A_{ik}不是S_{ik}的最佳解, 則表示有一A'_{ik}使 $|A'_{ik}| > |A_{ik}|$
- 但如果這樣

- 則此解之工作數目為$|A'_{ik}| + 1 + |A_{kj}| > |A_{ik}| + 1 + |A_{kj}| = |A_{ij}|$, 表示$A_{ij}$不是最佳解 (矛盾)
- 因此A_{ik}為S_{ik}的最佳解

有Optimal substructure, 可以用DP解!

接下來怎麼解呢?

- $c[i,j]$代表S_{ij}最佳解的工作數目
- 則$c[i,j] = c[i,k] + 1 + c[k,j]$
- k是我們的選擇(不知道選哪一個)

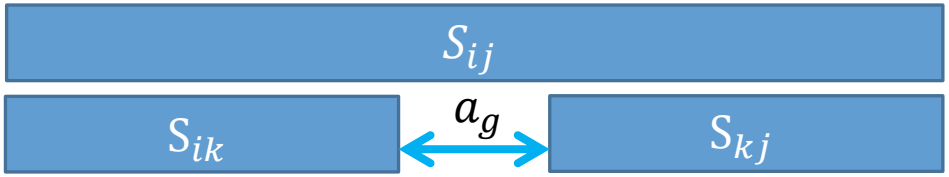
如果我們可以證明我們知道呢?

- $$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{if } S_{ij} = \emptyset \\ \max_{a_k \in S_{ij}} \{c[i,k] + 1 + c[k,j]\} & \text{if } S_{ij} \neq \emptyset \end{cases}$$
- 接著使用top-down or bottom-up方法填表即可

等等, 我們需要用到尚方寶劍嗎?

Greedy Algorithm

- 某些問題, 我們可以知道怎麼做選擇!
- 此稱為greedy choice
- 如果greedy choice為optimal choice, 再加上optimal substructure, 我們就可以非常快速的得到解!



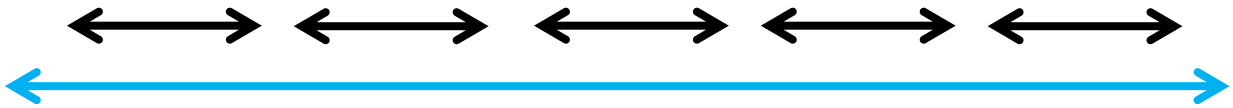
不需要考慮所有a_k的選擇!

只需要直接解選擇a_g之後的subproblem!

怎麼做出選擇？（創造力）

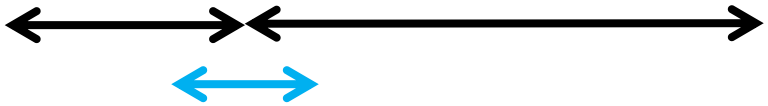
- 每次都選最早開始的工作

反例



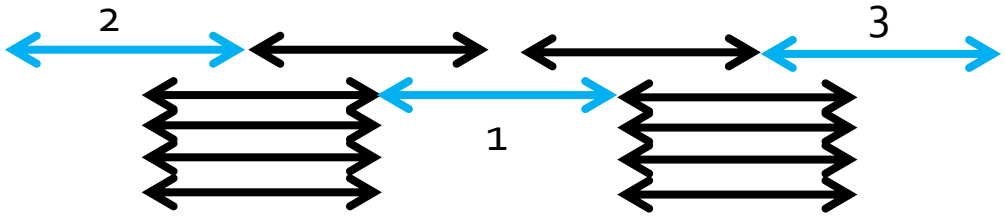
- 每次都選花最少時間的工作

反例



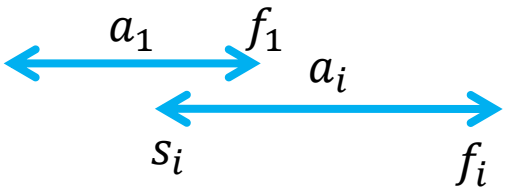
- 每次都選跟其他最少衝突的工作

反例



Greedy choice

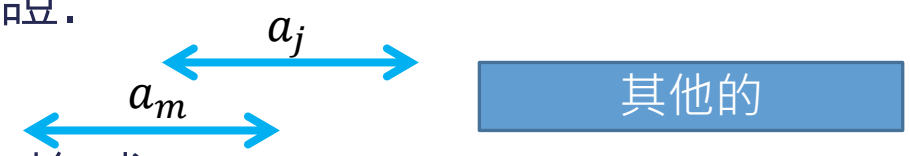
- 正確的greedy choice(之一): 選最早結束的.
- 原因: 越早結束, 後面就越多時間讓其他工作執行.
- →因為原本已經照f_i排序好了, 每次我們都選a_1
- 接下來只需考慮a_1結束以後才開始的所有工作
- 因為其他a_i的結束時間$f_i \geq f_1$, s_i要大於f_1才不會重疊.



證明greedy choice是正確的!

- 定理: 在某subproblem S_k中a_m的完成時間最早, 則S_k的某些最佳解(如果有很多個)中一定有a_m
- 證明: 假設A_k是S_k的某個最佳解, A_k裡面完成時間最早的是a_j.

1. 如果a_j就是a_m, 則得證.
2. 如果a_j不是a_m, 則
   所以可以把A_k中的a_j換成a_m.



更換後工作數目不變, 和A_k一樣多, 因此為另外一個最佳解, 得證.

結論： 有時候並不需要DP！

- DP可以用, 但是慢很多. (殺雞不用尚方寶劍)
- Greedy algorithm通常使用top-down 的方法:
  1. 根據目前知道的事情選出最好的選擇
  2. 繼續解用了這個選擇之後的subproblem
  3. 重複以上一直到subproblem可以直接解掉

- 重點: 請確定(要證明)greedy choice一定會出現在最佳解裡面!!!

來個pseudo-code

s: 存開始時間的陣列
f: 存結束時間的陣列
k: 目前要解的subproblem為S_k
n: 總共有幾個task (problem size)

```
Recursive_Activity_Selector(s,f,k,n)
m=k+1
while m<=n and s[m]<f[k]
      m=m+1
if m<=n
      return {a_m} ∪
Recursive_Activity_Selector(s,f,m,n)
else
      return ∅
```

選完greedy choice以後只剩下
一個recursive call在最後: tail recursive

$\Theta(n)$

來個pseudo-code

```
Greedy_Activity_Selector(s,f)
n=s.length
A={}
k=1
for m=2 to n
      if s[m]>=f[k]
            A=A ∪ {a_m}
            k=m
return A
```

$\Theta(n)$

什麼問題可以使用greedy algorithm來解?

1. 如果做出一個choice之後, 可以找到剩下要解的單一個subproblem (定義好subproblem)

   1.999. 決定要怎麼做greedy choice.

2. 有greedy property. (必須證明最佳解裡面一定有greedy choice)
3. 有optimal substructure (必須證明大問題的最佳解裡面有小問題的最佳解)

0-1背包問題

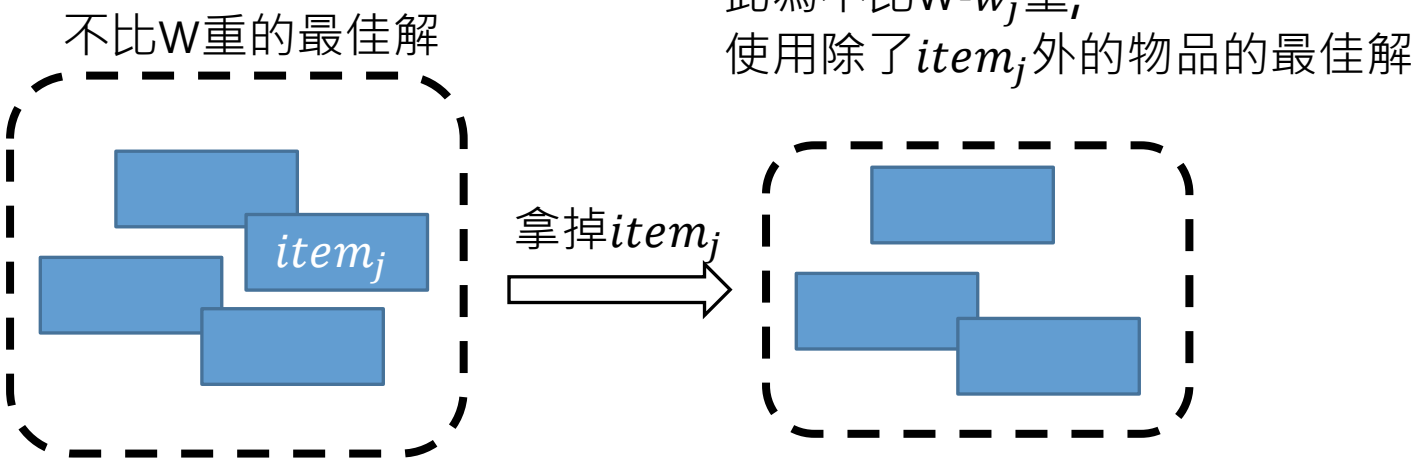
- 某店面有n個物品$\{\text{item}_1, \text{item}_2, \ldots, \text{item}_n\}$
- 各價值$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 各重$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$
- 小偷有一個可以裝W這麼重的背包
- 請問要偷走哪些東西可以使小偷拿走的東西總價值最高?

fractional背包問題

- 某店面有n個物品$\{\text{item}_1, \text{item}_2, \ldots, \text{item}_n\}$
- 各價值$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 各重$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$
- 小偷有一個可以裝W這麼重的背包
- **可以拿走"部分物品" (切物品的一部分)**
- 請問要偷走哪些東西可以使小偷拿走的東西總價值最高?

背包問題的optimal substructure

定理:



證明: (適用於0-1 & fractional 背包問題)

1. 假設右邊的不是最佳解的話,
2. 則可以找到一最佳解, 價值更高且不比W-w_j重.
3. 此解加上$item_j$以後也還沒有超過W,
4. 而且此解加上v_j後總價值比左邊的價值還高 (矛盾)

Fractional 背包問題的greedy choice

- 把物品按照單位重量的價值來排序 (也就是$\frac{v_i}{w_i}$)

1. 選出單位重量價值最高的(greedy choice).
2. 如果可用重量(W)比物品重量w_i小, 則把背包填滿, 把物品多餘的部分捨棄.
3. 如果可用重量比物品重量w_i大, 則繼續解子問題: 可用重量剩下W- w_i, 把已放入的物品從物品集合中去除.

證明fractional背包問題有greedy property

- 其實就是要證明, (某些)最佳解裡面有greedy choice
- 通常使用的方法:

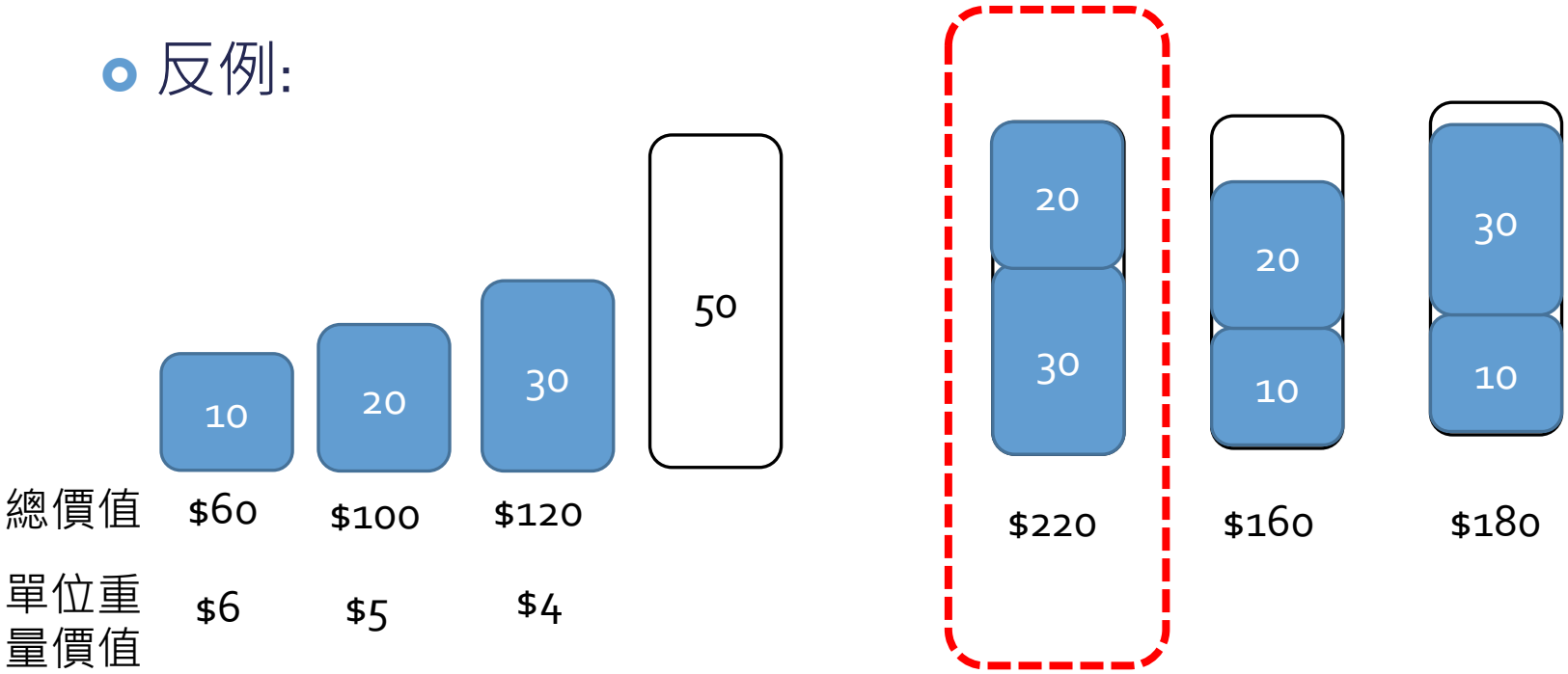
1. 假設可以拿到最佳解.
2. 最佳解裡面如果已經有greedy choice的話, 則得證.
3. 最佳解裡面如果沒有greedy choice的話, 則想辦法把最佳解裡面的一些東西和greedy choice互換. 結果發現這個新解跟greedy choice一樣好 (也是一個最佳解) 或者發現這個新解更好 (矛盾, 所以最佳解裡面不可能沒有greedy choice)

證明fractional背包問題有greedy property

1. 假設可以拿到可用重量為W最佳解. 假設$item_j$為單位重量價值最高者(或其中之一).
2. 如果$W \leq w_j$, 則將最佳解之所有東西都換成$item_j$.
3. 如果$W > w_j$, 則將最佳解中的物品按照單位重量價值排序，取其中重w_j之最高價值物品(可能包含部分$item_j$)與剩餘之$item_j$交換.
4. 因為$item_j$為單位重量價值最高者, 因此作了以上交換以後得到之解, 總價值只可能上升或相等. 但原來已經為最佳解, 因此總價值只可能相等
5. →交換過後的解也是最佳解
   →因此至少很多種最佳解中其中幾種裡面有greedy choice.

此一greedy choice不適用於0-1背包問題!

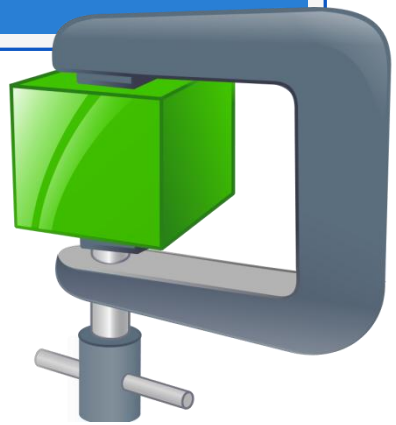
- 反例:



注意: 但是這不代表這個問題一定沒有greedy property! 只是表示這個greedy choice不是正確的!

最佳解, 但是沒有greedy choice!

因為如果有空間沒有用到, 就會使單位重量的價值下降!!



Huffman codes

	a	b	c	d	e	f
出現次數	45k	13k	12k	16k	9k	5k
Fixed-length codeword	000	001	010	011	100	101
Variable-length codeword	0	101	100	111	1101	1100

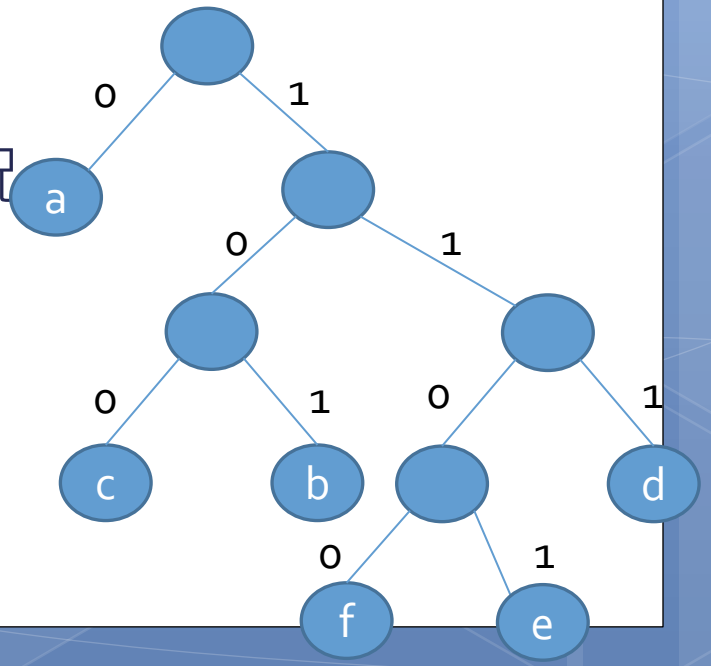
總共需要300 Kb

總共需要224 Kb

越不常出現的字, codeword應該越長!

Prefix code

- 定義: 某個code中, 沒有任何一個codeword是另外一個codeword的prefix, 則稱為prefix code.
- Encode: “abc”→”0 101 100”
- Decode: “0 101 100”→”abc”
- 使用右邊的decoding tree, 走到leaf就解出一個字母
- Prefix code就不會有混淆的狀況產生.
- 例: a=001 b=00 c=1
  那看到001是 “a” or “bc”?
- 注意: 此非binary search tree!

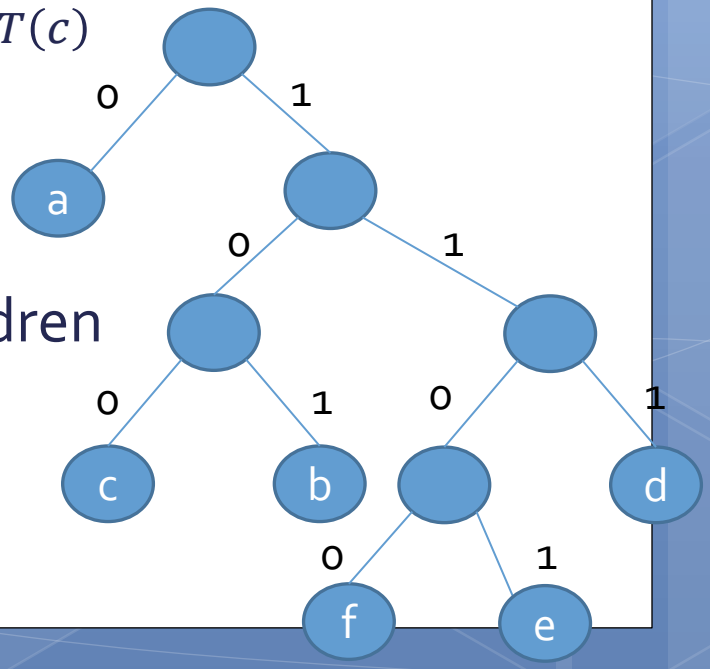


如何產生最佳的code呢?

- 想要產生一棵decode tree, 使得檔案大小能最小.
- 檔案大小(cost):

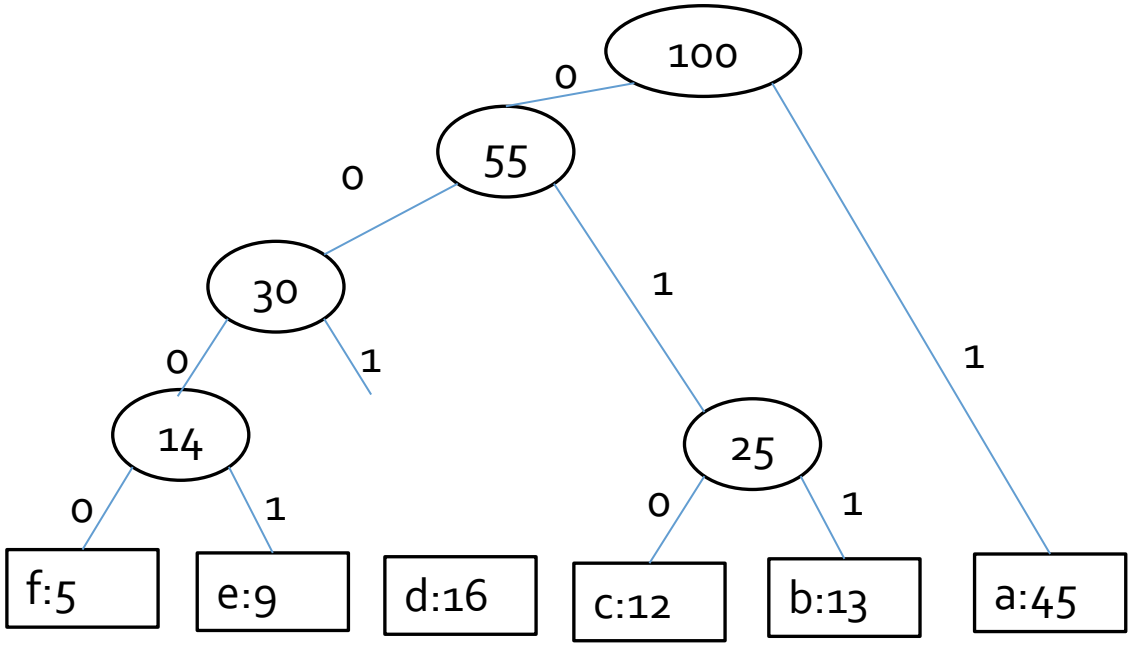
$$B(T) = \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_{T(c)}$$

- Full binary tree
  (跟上學期定義不同!):
  每個non-leaf node都有兩個children
- 一個optimal code畫成的decode tree一定是full binary tree.



Huffman code

- Huffman發明了一種使用greedy algorithm產生optimal prefix code的方法, 稱為Huffman Code



Pseudo-code

```
Huffman(C)
n=|C|
Q=C
for i=1 to n-1
      allocate a new node z
      z.left=Extract_Min(Q)
      z.right=Extract_Min(Q)
      z.freq=z.left.freq+z.right.freq
      Insert(Q,z)
return Extract_Min(Q)
```

起始Priority queue: $O(n)$

在Priority Queue Q拿出item: $O(\log n)$

在Priority Queue Q插入z: $O(\log n)$

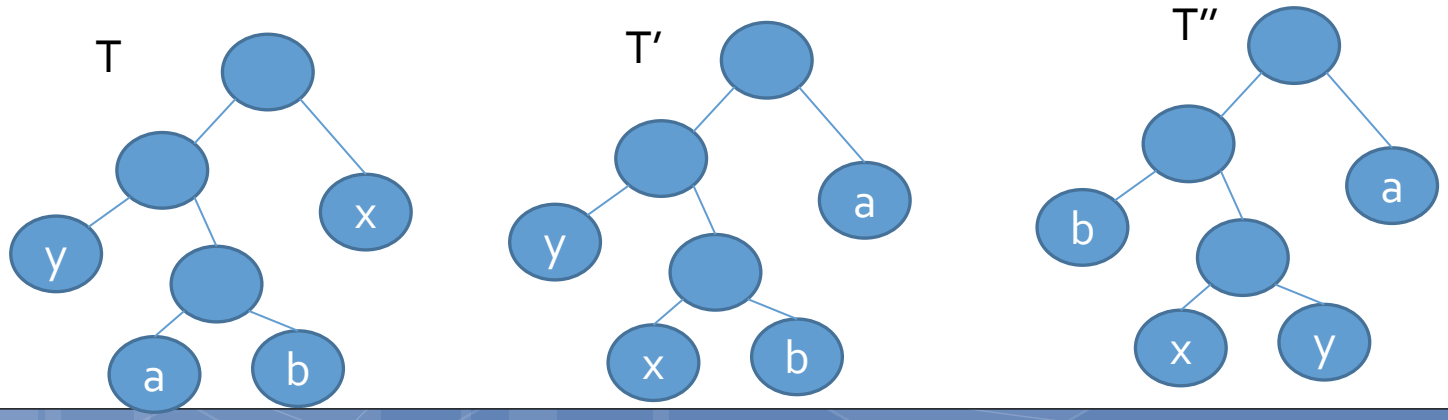
證明最佳解裡面一定有greedy choice

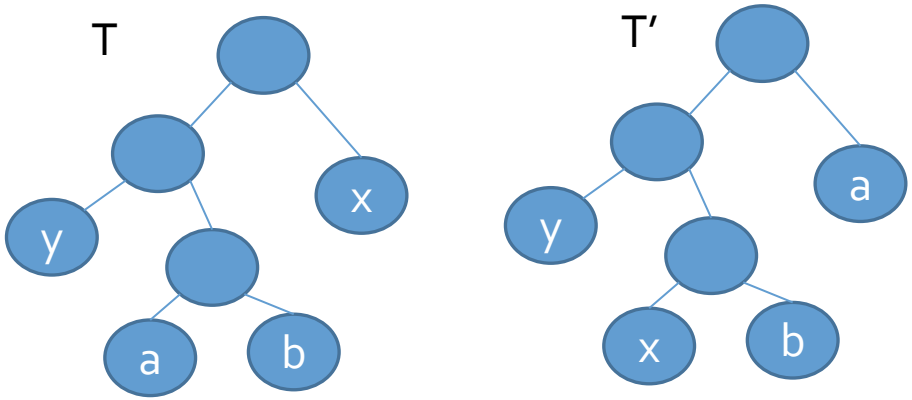
- 定理: 假設所有的字都在集合C裡面. 每個字$c \in C$, 出現的頻率為c.freq. 假設x和y為C中頻率最低的. 則一定有一組最佳的code是使得x和y的codeword長度一樣且只有最後一個bit不同.
- 證明:

1. 假設有T代表任一的最佳code. 在其中假設a 和 b在T中為depth最大且為sibling的兩個字元. 我們可以假設$a.freq \leq b.freq$及$x.freq \leq y.freq$.
2. 因為" x和y為C中頻率最低的", 所以$x.freq \leq a.freq$及$y.freq \leq b.freq$.

證明最佳解裡面一定有greedy choice

3. 如果x.freq=b.freq, 則x.freq=a.freq=y.freq=b.freq. 如此的話可以直接得證 (可以把x和a交換, y和b交換, 則得到另一optimal code, x和y的codeword長度一樣且只有最後一個bit不同)
4. 如果$x.freq \neq b.freq$, 則先將a, x交換(得到T'), 再將y, b交換(得到T'')





- $B(T) - B(T')$

$$= \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_T(c) - \sum_{c \in C} c.freq \cdot d_{T'}(c)$$

$$= x.freq \cdot d_T(x) + a.freq \cdot d_T(a) - x.freq \cdot d_{T'}(x) - a.freq \cdot d_{T'}(a)$$

$$= x.freq \cdot d_T(x) + a.freq \cdot d_T(a) - x.freq \cdot d_T(a) - a.freq \cdot d_T(x)$$

$$= (a.freq - x.freq)(d_T(a) - d_T(x))$$

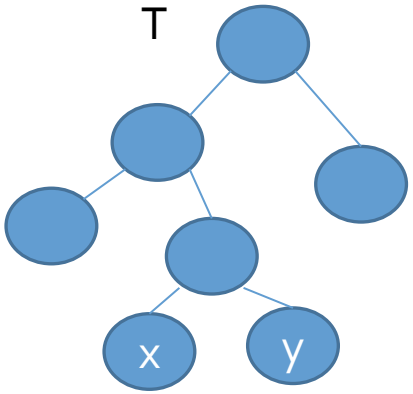
$$\geq 0$$

- 類似方法可得到$B(T') - B(T'') \geq 0$, 因此$B(T) \geq B(T'')$. 但因T已為最佳解, 所以只可能$B(T) = B(T'')$, T''也是最佳解 (得證)

證明題目有optimal substructure

T為C之最佳解

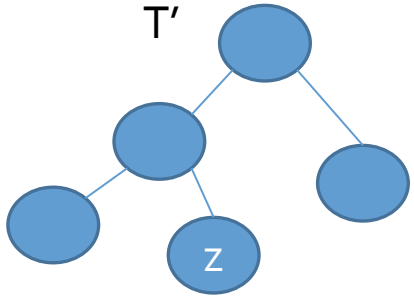
C



$C' = C - \{x, y\} \cup \{z\}$

最佳解為T′

z為一新字元, z.freq=x.freq+y.freq



$$B(T) = B(T') - z.freq \cdot d_{T'}(z) + x.freq \cdot d_T(x) + y.freq \cdot d_T(y)$$
$$= B(T') - (x.freq + y.freq) \cdot d_{T'}(z) + x.freq \cdot (1 + d_{T'}(z)) + y.freq \cdot \big(1 + d_{T'}(z)\big)$$
$$= B(T') + x.freq + y.freq$$

證明題目有optimal substructure