

15_典型的 IOI 題目(A_Typical_IOI_Problem)

(10分 / 10分)

時間限制: 2 seconds

記憶體限制: 1024 MB

題目敘述

今年當上阿根廷 IOI 國手的 LDC，最近有一個煩惱：IOI 的特色是有不少困難的數學題，生成函數及多項式操作只是基本，IOI 金牌選手幾乎都精通分析及代數！專精資料結構、網路流及實作的她難以適應 IOI 題型，於是她向她的老師 Frank 要了一題 IOI 練習題。題目敘述如下：

Frank 有 N 位學生，分別編號 $1, 2, \dots, N$ 。 N 位學生的人際關係可以由 $1, 2, \dots, N$ 的一個排列 $p_1, p_2, \dots, p_N$ 和一個長度為 N 且每個字元都是 0 或 1 的字串 t 表示，其中定義一個長度為 n 的陣列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 為 $1, 2, \dots, n$ 的排列如果 $1, 2, \dots, n$ 都出現在陣列 a 裡恰好一次。舉例來說， $N = 3, p = [3, 1, 2], t = 010$ 為一組合法的人際關係。

他們準備要考德文期末考，於是 Frank 準備了 N 張考卷給助教 LDC 要她發給學生，每位學生都應該要被發到一張考卷。由於學生太多，她用以下的步驟發考卷：

1. 如果她手上沒有考卷了（也就是每一位學生都已經拿到考卷），結束這個流程。
2. 把手上的所有考卷交給編號最小的沒有考卷的人。
3. 喝一杯牛奶。
4. 等待直到有學生舉手。當有學生舉手的時候，把那位學生還給她的考卷拿走，然後回到步驟 1。

當學生 i 拿到 x 張考卷的時候（無論是 LDC 發的或是其他學生傳的），學生 i 會依序進行以下的操作：

1. 把 1 張考卷留給自己
2. 如果以下三個條件至少有一個成立，學生 i 會舉手，然後把 $x - 1$ 張考卷還給 LDC（LDC 在拿到考卷之後學生 i 就會把手放下），否則把 $x - 1$ 張考卷傳給學生 p_i
 - 學生 p_i 目前已經拿到考卷
 - $x = 1$
 - $t_i = 1$

不過 LDC 對學生們的人際關係只有有限的認識。她有的資訊可以用一個長度為 N 的字串 s 表示，其中每個字元都是 0、1 或 ?。對於所有整數 i 滿足 $1 \leq i \leq N$ ，如果 $s_i \neq ?$ ，那麼 LDC 知道 $t_i = s_i$ ，否則她不知道 t_i 是什麼。而對於 $p_1, p_2, \dots, p_N$ ，LDC 完全沒有任何資訊。

對此，假設 $p_1, p_2, \dots, p_N$ 為均勻隨機的從所有 $1, 2, \dots, N$ 的排列選一個，而且對於所有整數 i 滿足 $1 \leq i \leq N$ 且 $s_i = ?$ ，有 $\frac{1}{2}$ 的機率 $t_i = 1$ ， $\frac{1}{2}$ 的機率 $t_i = 0$ 。假設所有的選擇都是獨立事件，問 LDC 發完考卷之後喝牛奶的杯數的期望值。因為 LDC 不喜歡小數，請輸出答案模 998244353 的值。

數學不好的 LDC 當然不會做這題，請你幫幫她，寫出能做出這題的程式。

若一個有理數 $\frac{Q}{P}$ 滿足 P, Q 都是整數、 $\gcd(P, Q) = 1$ 且 P 不被 998244353 整除，定義 $\frac{Q}{P} \pmod{998244353}$ 為唯一的整數 R 滿足 $0 \leq R < 998244353$ 且 $RP \equiv Q \pmod{998244353}$ 。

能被證明所求的期望值是一個有理數，且寫成最簡分數 $\frac{Q}{P}$ 後分母 P 不被 998244353 整除。

輸入格式

輸入第一行為一個整數 T ，代表有 T 筆測試資料。

每一筆測試資料的格式如下：

測試資料第一行為一個整數 N 。

測試資料第二行為一個長度為 N 的字串 s ，其中每一個字元都是 `0`、`1` 或 `?`。

輸出格式

對於每一筆測試資料輸出一行。那一行只有一個數字，為 LDC 喝牛奶的杯數的期望值。

資料範圍

- $1 \leq T \leq 5000$
- $1 \leq N \leq 5000$
- $|s| = N$
- 在一筆輸入檔案中，所有測試資料的 N 的總和 ≤ 5000

子任務

- 子任務 1 滿足在一筆輸入檔案中，所有測試資料的 N 的總和 ≤ 400 (10分)
- 子任務 2 沒有其他限制 (10分)

測試範例

輸入範例 1

```
2
2
?1
8
100?0?1?
```

輸出範例 1

```
249561090
522444260
```

範例說明

對於第一筆範例， t 有兩種可能：`01` 和 `11`，而 p 有兩種可能： $\{1, 2\}$ 和 $\{2, 1\}$ 。

如果 $t = \text{01}$ 且 $p = \{1, 2\}$ ，發考卷的流程如下：

1. LDC 發 2 張考卷給學生 1。

2. LDC 喝了一杯牛奶。
3. 學生 1 把 1 張考卷留給自己。
4. 由於學生 $p_1 = 1$ 已經拿過考卷，學生 1 舉手，並把 1 張考卷還給 LDC。
5. LDC 發 1 張考卷給學生 2。
6. LDC 喝了一杯牛奶。
7. 學生 2 把 1 張考卷留給自己。
8. 由於學生 $p_2 = 2$ 已經拿過考卷，學生 2 舉手，並把 0 張考卷還給 LDC。
9. 由於 LDC 手上沒有考卷了，流程結束。

在這個情況下，LDC 喝了 2 杯牛奶。

如果 $t = 01$ 且 $p = \{2, 1\}$ ，LDC 會喝 1 杯牛奶。

如果 $t = 11$ 且 $p = \{1, 2\}$ ，LDC 會喝 2 杯牛奶。

如果 $t = 11$ 且 $p = \{2, 1\}$ ，LDC 會喝 2 杯牛奶。

每一種情況發生的機率都是 $\frac{1}{4}$ ，所以 LDC 期望喝了 $\frac{2+1+2+2}{4} = \frac{7}{4}$ 杯牛奶。因為 $249561090 \times 4 \equiv 7 \pmod{998244353}$ ，所以輸出 249561090。