

向理性與直覺挑戰的頑皮精靈—綜觀詭譎的悖論

Shou-de Lin

「又是一封廣告信！」小非沒好氣地盯著主旨為「**不讀會後悔**」的電子郵件，自言自語地說。

在準備把郵件刪除的同時，小非腦中突然浮起一個想法：常常聽人說，如果當初沒有這樣那樣做，現在一定會後悔。仔細想想這種想法似乎是種矛盾，就像我現在刪了這封信，便永遠不知道信中寫了甚麼，所以也沒有甚麼後不後悔可言。沒有讀信所造就的未來，已經和讀信的未來分歧，也就不存在被客觀評價的空間了（**條件悖論 Conditional Paradox**）。

有趣的是，這封似是而非的信署名竟為「似是而非學院」，這引起了小非的好奇心：

似是而非研究院今年首度對外招收研究生，有意願申請者，請以「似是而非」為題創作一篇短文，投稿至本會…

「似是而非研究院？聽起來挺有趣的啊！」小非想了想，於是就把剛剛的想法整理成短文，回覆了這封郵件。

三週後的一天小非打開電腦，突然發現一封署名「似是而非研究院院長」的郵件：

恭喜您已經通過本院初步的審查，本人誠摯邀請您前來參加面試。似是而非學院座落在一處無法以文字敘述的隱密地點。前往的方法，將在明晚八點整「迷思魔術坊」的表演現場揭曉，屆時煩請舉手當自願者。

「**無法以文字敘述的地點**？可是這句話本身不就是文字嗎？果然是似是而非的风格」小非想起了以上美術課時，老師讚揚吳道子的水墨畫「美得無法以**筆墨**形容」，不過，水墨畫不正是用「筆墨」畫出來的嗎（**貝立悖論 Berry Paradox**）？

好奇的小非隔天來到了迷思魔術坊。當時正在表演一個叫「魔法門」的遊戲，小非果然衝到前面當第一個自願者。

主持人解釋了遊戲規則：「這兒有三道門，其中一道是台神秘電梯的門，另外兩道則是堵死的牆，請選擇一個門開，剩下的就靠運氣了。」

小非於是隨便選了中間的門。

主持人接下來說：「我們都知道剩下兩扇門至少有一扇不通，而這個遊戲的第二個規則是：當你選了一個門後，我會從剩下的兩個門中打開一扇行不通的門，然後再給你一次機會去考慮是否要更改你的選擇。」主持人接著打開了右手邊不通的門。

之後是小非的抉擇了，下面的人開始鼓譟：「反正就是一比一的機率，換不換也沒甚麼關係！」小非覺得有道理，不過他還是決定要換。因為左邊的門離下台階比較近，如果選錯了在台上被觀眾嘲笑的時間也比較短。

主持人打開了小非選的門，是台電梯，而小非就在觀眾的鼓譟聲中走了進去。在門關起的同時，小非拍了一下自己的腦袋叫道：「我錯了，機率該是二比一才對！」

這時電梯開始往下降，裡面卻沒有燈號指示。當小非開始覺得緊張時，電梯門突然開了，小非走了出去，看到一個大門兩旁掛著一幅對聯：「人無大是，必有小非，小錯不斷，大過不犯。似是非非，非非似是，人無不是，又豈有非？」橫批：似是而非學院。

「小非，恭喜你通過了我們的第一個考驗——**蒙地豪爾謎題 (Monte Hall Puzzle)**，感想如何？」小非回頭看，是一個長者站在他身後說話。

「嗯！這個看似二分之一成功率的選擇，在主持人打開那扇不通的門的時後就已經改變：事實上選擇「換」的成功率是「不換」的兩倍。因為我一開始選到牆壁的機率是 $2/3$ ，選到電梯的成功率只有 $1/3$ ；但是如果選到牆壁而第二次機會選擇交換就能得到電梯，反之如果第一次選到電梯交換後就會變成牆壁。所以選擇交換的話，電梯的機會反而換成了 $2/3$ 。三個門的謎題容易迷惑大眾。把它想成有十個門，而主持人在選後打開其中八個不通的門，就容易理解多了」小非回答。

「可是無論如何我還是有 1/3 失敗的機率啊！」小非略帶抱怨。

「運氣本來就是成功的要素之一，而且通常比重超過 1/3，不是嗎？這個謎題告訴我們，其實生活中來自四面八方的訊息都可能幫助我們做出更好的決策，端視個人能否看出訊息背後所隱含的意義！」

長者繼續說：「喔！忘了自我介紹了，我是似是而非學院的院長，我叫鄧不少」

「鄧不少？請問您跟霍格華茲的鄧不多有甚麼關係嗎？」

「多少怎麼定義呢？甚麼算多？甚麼算少？」鄧不少說著，並把小非拉到一邊，給他一塊錢，說：「我有不少的錢，大概好幾百萬吧！我現在分給你一元，那你覺得我還是有不少錢嗎？」

「當然！不過九牛一毛而已！」

「那我再給你一元！喔！拿去，你現在覺得我還有不少錢嗎？」

「當然還是不少。可是…如果你不停地給我一元並不斷地問這個問題，我將會一直重複同樣的回答。但終究有一天你的錢會給完，我卻不知到應該要在哪一點說你的錢從『不少』變成了『不多』。」小非大概瞭解鄧不少想說的事了（**連鎖悖論 Sorites Pradox**）

「正確！不多也不少。看來你領悟力蠻強的嘛！不過，可不可以先把錢還給我，我們還會有別的學生來面試，我不想太早變成鄧『不多』。」

校長伸手要回了他的兩元，可是一不小心，錢突然從手上滑落，滾進了電梯的夾縫中。

他踱足道：「真是倒楣，我跟這台電梯還真是八字不合。錢滾進去就算了，每次我要從這三樓往十九樓的校長室時，等到的電梯老是往下的；但是從那裡要下來時，等到的偏又都是往上的，真是搞不懂。」

小非覺得這個論調有趣，想了想後說：「其實當你到達三樓電梯口的當下，電梯往上或往下的機率是一樣的。但是只要這時電梯在三樓到頂樓之間，不管它是往上或往下，最終到達三樓時都得是往下；反之只要這時電梯是在一到三樓之間，到達三樓時皆是往上。但是因為電梯分佈在三到頂樓的機率大於電梯在一到

三樓的機率，因為前者區間較廣，所以你才會覺得它往下比較多。相同的道理可以推得出在十九樓大多看到往上電梯的現象。」

「對嘞！我怎麼沒想到，這就是**電梯悖論(elevator paradox)** 嘛！忘了這個悖論的人，就會像我一樣常常把人生中的挫折歸咎於運氣，而這樣的藉口也讓自己忽略了這些挫折也可能只是因果之下的產物。」校長拍了拍自己的腦袋。

校長帶著小非參觀學校，整個似是而非學園就座落在城鎮旁的山谷，所以一開始才需要乘著電梯下到地下深處。當他們走離崖壁時，突然驚起了一大群烏鴉，黑壓壓的一片。這時校長突然問：「你怎麼驗證『所有烏鴉都是黑的』這個敘述是真是假？」

「簡單，我每看到一隻黑色的烏鴉，就加強了對這個敘述的信心。等到我有一天觀察過世界上所有的烏鴉，發現他們都是黑的，那我就百分之百確信這個敘述是真的了！」

「很好！那麼『所有烏鴉都是黑的』這個敘述，在邏輯上是不是等價於『不是黑的東西都不是烏鴉』？」

「對啊！這兩句話邏輯上是等價的：其中之一成立，則另外一個必成立」

「所以用你剛剛提出的方法來證明第二個敘述：我們每看到一個『不是黑的非烏鴉』，就會加強我們對這兩個等價敘述的信心，對吧？」

「邏輯上的確是對的。」

「那紅色的蘋果是不是『不是黑的非烏鴉』？」

「當然囉！」

「難道看到一個紅色的蘋果，就會加強我們對『所有烏鴉都是黑的』這個敘述的信心嗎？」

「這...直覺上好像沒有道理。所以你的意思是說統計上的推論跟我們的直覺，有一個是錯的囉？」(烏鴉悖論 **Raven Paradox**)

「常常聽到人家說：要相信自己的直覺。但是直覺跟理智衝突時，比較保險的方法還是歸諸理性思辯」校長回答。

「所以在這個問題，直覺是錯誤的囉？」

「可以這樣說。這世界上可能只有幾千萬隻烏鴉，所以你每看到一隻黑烏鴉，就可以增加幾千萬分之一的信心。但是這世界上的「非黑色物體」大概是烏鴉總數的幾千億倍，所以每觀察到一個非黑色的非烏鴉，能增加的信心幅度跟看到黑烏鴉比起來，簡直是趨近逾零，所以直覺上我們才會覺得看到紅色的蘋果不會增加對黑色烏鴉存在的信心。試想如果我告訴你世界上所有不是黑的的東西都已擺在你面前，然後你發現他們沒有一隻是烏鴉，你就會肯定烏鴉一定是黑的。」

「這烏鴉悖論還真赤裸裸的點出人類直覺的盲點啊！」小非若有所思。

「嗯！前面操場正好有園遊會，讓我們去參觀一下吧！」

校長帶著小非到了一個寫著「無限賭局」攤子前面。它的賭法倒是與眾不同：拋一枚硬幣，統計你要拋幾次才能得到正面，而你每多拋一次，你所得的錢加倍。比如你拋了兩次才得到正面，則你可以得到四元，三次則是八元，四次有十六元。而玩一次需要十萬元。

「先算算報酬期望值吧！」校長建議小非。

小非想了一會兒，發現期望值竟然為：

$$\frac{1}{2} * 2^1 + \frac{1}{4} * 2^2 + \frac{1}{8} * 2^3 + \dots = 1+1+1+\dots = \text{無窮大}$$

校長問：「既然報酬期望值是無窮，所以即使玩一次要一千萬元還是要玩囉，何況是十萬？」

「我覺得要我出一千元玩我都不大肯，因為除非連續出現反面超過九次，否則我就虧了，但是連續反面九次以上的機率太小了吧！但是...既然統計告訴我們這個遊戲的期望值很高，為什麼人們不願花大錢來賭呢？到底問題出在機率還是直覺呢？」小非感到疑惑。

「都不是，問題出在金錢的數量與它在人心的價值可不是簡單的線性函數，比如中了一百萬跟一千萬的樂透，你的快樂程度可能差蠻多的；但是中了一百億跟一千億的樂透，也許你的快樂差距就沒有那麼大，反正都是一輩子用不完的數量。」

小非接著說：「我懂了！我們是用直覺而非數學來衡量值不值得賭。直覺所用的量尺是『金錢的價值』，而非『金錢的數量』。報酬數量雖是以指數上升，但是報酬的價值顯然就不是。這也就是為什麼直覺上不會花大錢去賭這一局的原因」(聖彼得堡悖論 St Petersburg Paradox)

「看來騙不到你的錢了！」鄧不少笑道。

這時突然有個人神色匆忙的跑到校長面前：

「校長先生，不好了，有人在校門口抗議我們遴選教授有性別歧視。他們說我們今年女性的錄取率 42% 是男性 21% 的兩倍」

「咦，我不是交代兩所所長，今年要盡量提升男老師的錄取率以免落人口實嗎？」

校長疑惑的問。

「對啊！我剛剛查過了，兩所所長的確是有注意，今年似是所的教授錄取率，男性為 75%，女性只有 49%。而非非所的男性為 10%，女性為 5%。都是男老師錄取率高。」

	女	男
似是學院： $\frac{\text{錄取人數}}{\text{申請人數}}$	$\frac{49}{100} = 49\%$	$\frac{15}{20} = 75\%$
非非學院： $\frac{\text{錄取人數}}{\text{申請人數}}$	$\frac{1}{20} = 5\%$	$\frac{10}{100} = 10\%$
總計： $\frac{\text{錄取人數}}{\text{申請人數}}$	$\frac{50}{120} = 42\%$	$\frac{25}{120} = 21\%$

仔細研究了一下數字後，證實了上述的一切都沒錯。這時候鄧不少出聲了：「小非，你知道為什麼兩所的個別錄取率男皆大於女，但是總體錄取率男卻遠小於女

嗎？」

「這....我不知道耶。」

「這是統計上著名的辛普森弔詭(Simpson's Paradox)，發生的原因，一言以蔽之就是男性候選人傾向選擇錄取率低的學院申請。就像是我叫你去比賽一百場籃球，以總勝率評價你的好壞，別人也許找校隊單挑二十場贏了一場，剩下的八十場找技術差不多的對手贏個一半四十場，你卻偏偏找校隊打了八十場，假設你技術不錯贏了八場，而剩下的二十場找普通的對手打個全勝。在這種狀況下你單獨的勝率都領先，但總勝率只有 28%，比人家 41%小得多。」

鄧不少繼續說：「量跟質是不等價的，無奈的是量比質來得容易量測，所以人們總是習慣用量來評定好壞。除了質與量的迷思之外，辛普森弔詭給出的另外一個啓示是：如果我們在人生的抉擇上選擇了一條比較難走的路，就得要有可能不被賞識的領悟。」

「所以這算是『懷才不遇』這個成語在統計上的詮釋囉！」小非笑道。

在行程接近尾聲時，校長拋出最後一道考題：「說說今天的感想吧！」

小非沈吟了一會兒，說道：「這些悖論，有的指出直覺的盲點，有的道破了非線性價值系統的奧妙；有的強調訊息的力量，有的破除好運壞運的迷思；他們點出了統計其實有其迷思存在，邏輯有時力有未殆，而文字操弄更是悖論的溫床。總括一句，我們是身處於充滿矛盾的世界啊！」

「說得好！也就是因為人的理性與直覺裡偶有缺憾，所以悖論才能遊移在那少數脆弱的環節中向我們挑釁。唯有用多面的視角看問題，才能真正不被愚弄」校長也對今天的啓示下了個註腳。

兩人握手道別後，小非轉身向電梯口走去。突然他想到了甚麼，回頭大喊：「啊！忘了說最後一個感想了：那就是如果不收我當學生的話，你們一定會後悔的呦！」