VFX 4/20 上課筆記

R93942119 陳元龍

Outline：

- Singular value decomposition(SVD 分解)
- Epipolar geometry and fundamental matrix
- Structure from motion(本次上課主題)
- Applications
- Factorization methods(在第三次作業中用得到，如果用 4/13 所提到的方法，雖然準確性佳但缺點爲要去更改 patterns)

-Orthogonal
-Missing data
-Projective
-Projective with missing data

一、 SVD

Note：任一矩陣可以代表一個 transformation！！

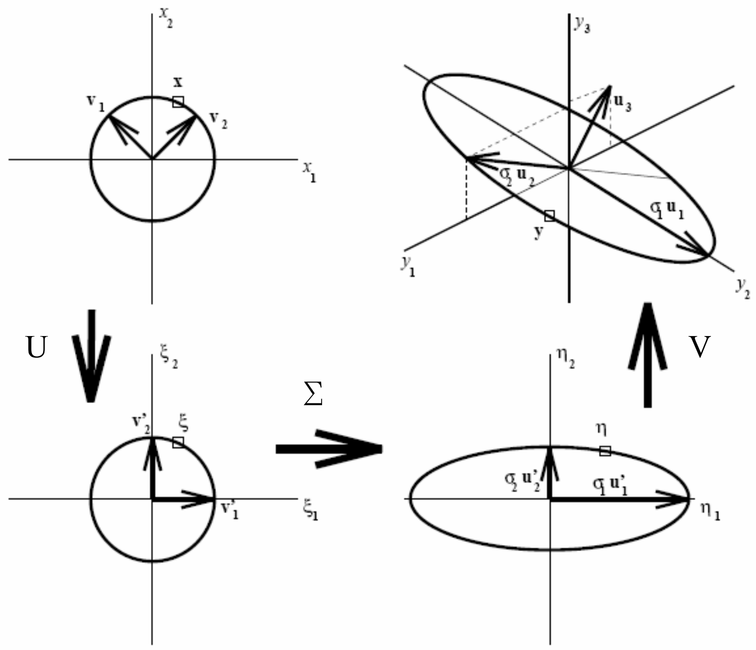
一個矩陣可以寫成： $A = U\Sigma V^T$

其中 U、V 爲兩個正交的矩陣，而 Σ 則爲一個對角矩陣

特性：1.每一個 m*n 的矩陣都可以轉爲 SVD

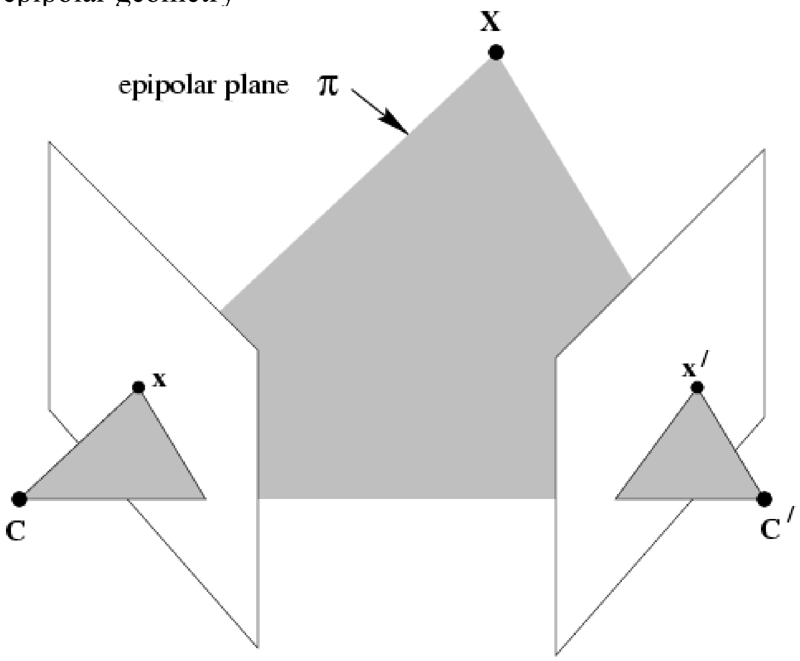
2.The diagonal entries of the stretcher matrix are called the "singular values of *A*".

SVD 的使用：我們可以利用矩陣來達到轉換的目標



二、 Epipolar geometry and fundamental matrix

A.簡介 epipolar geometry：

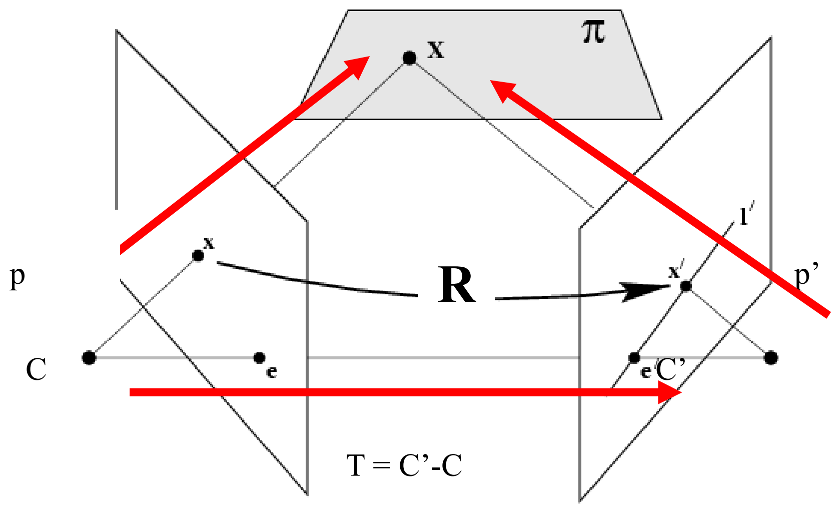


X 爲目標物體，可以調整位置，造成不同的 line、plane、pole。

X 跟 C 與 X 跟 C’分別產生 x 及 x’，又 C 跟 C’的交線在兩平面上會穿過兩點 e、e’(此兩點即爲 epipolar pole)，則 x-e 及 x’-e’兩線段爲 epipolar line(可拿來做 linear search)。

B. Fundamental matrix F：

Goal：兩台相機在焦點 C、C’所產生的相對座標不同，我們要試著在兩個不同的座標系統中，找出一個關係，使得這兩個座標間可以輕易換算成另一個。



其中 p=X-C，p’=X-C’

數學推導：

$$p' = R(p-T)$$

$$(\mathbf{p}-\mathbf{T})^{\mathrm{T}}(\mathbf{T}\times\mathbf{p}) = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}')^{\mathrm{T}}(\mathbf{T}\times\mathbf{p}) = 0$$

又 $\mathbf{T}\times\mathbf{p} = \mathbf{S}\mathbf{p}$ $\quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -T_z & T_y \\ T_z & 0 & -T_x \\ -T_y & T_x & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (\mathbf{p}'^{\mathrm{T}}\mathbf{R})(\mathbf{S}\mathbf{p}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}'^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{p} = 0 \quad \text{-----(*)}$$ E 為 essential matrix

How to find x、x’?? (兩個點在不同的參考座標上)

M、M’：intrinsic parameters

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} \qquad \mathbf{p}' = \mathbf{M}'^{-1}\mathbf{x}'$$

代回(*)式中整理後可得

$$\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{M}'^{-\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} = 0$$

再令中間三項爲一個矩陣 F，此矩陣即爲 fundamental matrix
即

$$\mathbf{x'}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}\mathbf{x} = 0 \quad \text{---------(A)}$$

很明顯的可以看出，如果我們有 F 這個矩陣的話，那麼 x'就可以輕易的被找出，但是如何找到 fundamental matrix 呢?!

先來看看 fundamental matrix F 的一些特性：

0. F is unique 3*3 with rank 2 matrix which satisfies (A) for all x and x'

1. Transpose: if F is fundamental matrix for (P,P'), then FT is fundamental matrix for (P',P)

2. Epipolar lines: l'=Fx & l=FTx'

3. Epipoles: on all epipolar lines, thus e'TFx=0, ∀x ⇒e'TF=0, similarly Fe=0

4. F has 7 d.o.f. , i.e. 3x3-1(homogeneous)-1(rank2)

5. F is a correlation, projective mapping from a point x to a line l'=Fx (not a proper correlation, i.e. not invertible)

C. Find fundamental matrix F

$$\mathbf{x'}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}\mathbf{x} = 0$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Because F is of rank 2,so we can use only 8 pair match points
8-point algorithm：

$$\begin{bmatrix} u_1u_1' & v_1u_1' & u_1' & u_1v_1' & v_1v_1' & v_1' & u_1 & v_1 & 1 \\ u_2u_2' & v_2u_2' & u_2' & u_2v_2' & v_2v_2' & v_2' & u_2 & v_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_nu_n' & v_nu_n' & u_n' & u_nv_n' & v_nv_n' & v_n' & u_n & v_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} = 0$$

f33 可視爲 1，因爲 rank=2。

只要找到八組 match points 代入上式，即可求得 fundamental matrix F。
因爲 F 是 rank=2 的 matrix，故用 F’來取代 F，且 minimizes ||F-F’|| subject to det(F’)=0。
用之前的 SVD 可以將 F 分解爲三個矩陣的乘積，
其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

再令

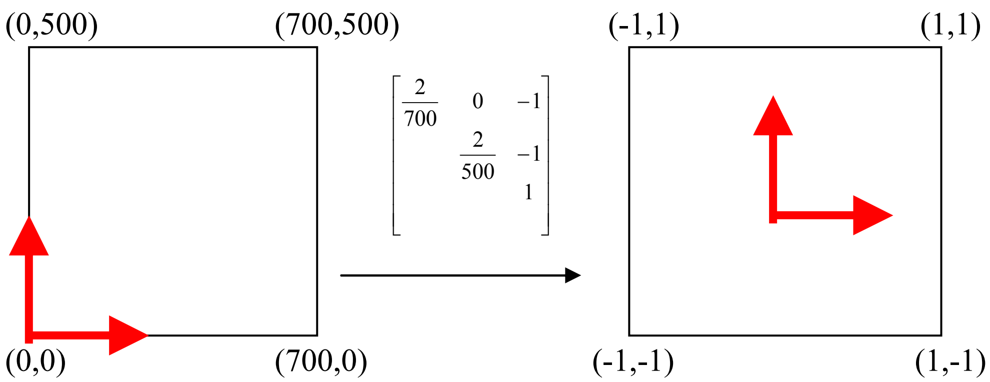
$$\Sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

則最後得到

$$\mathbf{F}' = \mathbf{U}\Sigma'\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$$ 才是我們所想要的答案。

8-piont algorithm 的優缺點：
優：線性、易實現且快速
缺：易被 noise 所影響

另一個較好的方法：Normalized 8-point algorithm
What is “normalized”??
A：簡而言之是將座標的原點放在中間。
圖例：



How to implement normalized 8-point algorithm?

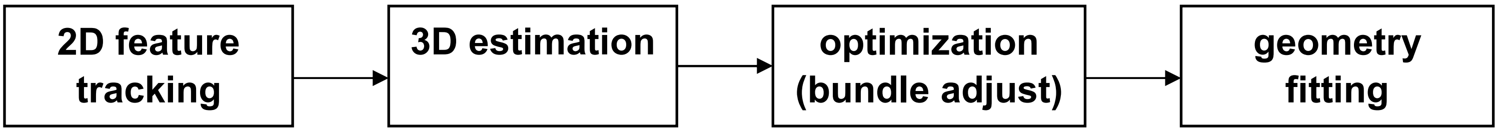
1. $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = \mathbf{T}\mathbf{x}_\mathbf{i} \quad \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}' = \mathbf{T}\mathbf{x}_\mathbf{i}'$

2. call 8-point on $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}'$ to obtain $\hat{\mathbf{F}}$

3. $\mathbf{F} = \mathbf{T}'^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{F}}\mathbf{T}$

三、**Structure from motion**

自動分析，也叫作 automatic camera tracking or match moving(實用在電影界)



SFM pipeline

Step 1：Track feature

可用 KLT tracking(效果不太佳)

SIFT(效果較好)

Step 2：Estimate motion and structure

作業三主要 focus 在這地方

Step 3：Refine estimation(bundle adjustment)

如果這個步驟有做的話，效果會比較好

Step 4：Recover surfaces

較不會碰到

Note 1：HW3 要拍攝場景時，不要變動太大，因為 track 的部分可能會很難做，且鏡頭要遠一點，不能只拍牆。

Note 2：lens distortion 對 recover 時較有用，做 matchmoving 時可不考慮。

Factorization methods：

SFM under orthographic projection：

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Pi p} + \mathbf{t}$$

q：2*1，2D image point

π ：2*3，orthographic projection matrix

p：3*1，3D image point

t：2*1，image offset

$$\Big\downarrow \text{ 移動 2D、3D point}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Pi p}$$

Factorization

Projection of n features in one image：

$$\underset{2\times \mathrm{n}}{\begin{bmatrix} \mathbf{q_1} & \mathbf{q_2} & \cdots & \mathbf{q_n} \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\prod} \underset{3\times \mathrm{n}}{\begin{bmatrix} \mathbf{p_1} & \mathbf{p_2} & \cdots & \mathbf{p_n} \end{bmatrix}}$$

Projection of n features in m images：

$$\underset{2\mathrm{m}\times \mathrm{n}}{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{11} & \mathbf{q}_{12} & \cdots & \mathbf{q}_{1n} \\ \mathbf{q}_{21} & \mathbf{q}_{22} & \cdots & \mathbf{q}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_{m1} & \mathbf{q}_{m2} & \cdots & \mathbf{q}_{mn} \end{bmatrix}} = \underset{2\mathrm{m}\times 3}{\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 \\ \mathbf{\Pi}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{\Pi}_m \end{bmatrix}} \underset{3\times \mathrm{n}}{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}}$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{M} \quad \mathrm{S}$$

Rank(W)=3 (assuming no noise)

對 W 作 SVD 可得

$$
\begin{aligned}
&W = U_{2m*2m} \sum\nolimits_{2m*n} V^T{}_{n*n} = M_{2m*3} * S_{3*n} \\
&W' = U'_{2m*3} \sum\nolimits'_{3*3} V'^T{}_{3*n} = (U'\sqrt{\Sigma'})(\sqrt{\Sigma'}V'^T) \\
&= M'*S'
\end{aligned}
$$